10. Srednjoeuropska matematička olimpijada 2016. g.

Srednjoeuropska matematička olimpijada održana je u Vöcklabrucku u Gornjoj Austriji, od 22. do 28. kolovoza 2016. godine. Na natjecanju je sudjelovalo 60 natjecatelja iz 10 europskih zemalja: Austrije, Češke, Hrvatske, Litve, Mađarske, Njemačke, Poljske, Slovačke, Slovenije i Švicarske. Hrvatsku su na natjecanju predstavljali:

Luka Banović, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka
Petar Nizić-Nikolac, XV. gimnazija, Zagreb
Lukas Novak, Gimnazija Josipa Slavenskog, Čakovec
Patrik Papac, Gimnazija Dubrovnik, Dubrovnik
Ivan Sinčić, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka
Tadej Petar Tukara, XV. gimnazija, Zagreb.

Voditelji ekipe bili su *Stipe Vidak* i *Petar Bakić*.

Pripreme za natjecanje održavale su se na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu od 6. do 24. lipnja. Predavanja su nam držali profesori matematike i bivši natjecatelji. Nakon toga je slijedio ljetni odmor, tijekom kojeg se svaki od nas pripremao samostalno. Tjedan dana prije odlaska na olimpijadu imali smo završne pripreme u Novom Vinodolskom na Ljetnom kampu mladih matematičara u organizaciji udruge Mladi nadareni matematičari Marin Getaldić. Predavanja su nam volonterski držali studenti matematike, bivši natjecatelji.

Grad domaćin natjecanja bio je Vöclabruck, gradić u Gornjoj Austriji koji je središte okruga. Prije natjecanja koje se održavalo u srijedu i četvrtak, imali smo priliku uživati u ruralnom krajoliku susjednog sela Timelkam i posjetiti tamošnju elektranu. U petak smo posjetili Linz gdje su nas dočekali predstavnici parlamenta savezne države Gornje Austrije, a naši voditelji su ostali u Vöcklabrucku na koordinacijama gdje su s ispravljivačima zadataka raspravljali o našim rješenjima. Sljedeći dan smo s mentorima otišli na izlet u Obertraun, mjestu na Hallstättskom jezeru u kojem smo se okupali.

Na individualnom dijelu natjecanja najteži je zadatak trebao biti četvrti, teorija brojeva, no ipak se težim pokazao treći zadatak, geometrija, koji je na kraju natjecanja bio najslabije riješen. Na ekipnom dijelu natjecanja došlo je do preokreta, jer je najteži zadatak bila funkcijska jednadžba, za razliku od prijašnjih godina kada su to uglavnom bile geometrija ili kombinatorika. Zbog dobrog rasporeda rješavanja i kvalitetnog timskog rada, svega desetak minuta prije kraja uspjeli smo rješiti i taj zadatak. Iako smo bili optimistični oko rezultata, do same objave rezultata nismo znali koliko smo bodova osvojili, te smo savršen rezultat dočekali slavljem. Srebrom su se okitili Poljaci s tri boda manje zbog neriješene funkcijske jednadžbe, a broncom Česi. Ova godina donijela nam je uvjerljivu pobjedu na natjecanju, jer smo osim ekipnog zlata odnijeli šest medalja i skupili najveći zbroj bodova na individualnom dijelu natjecanja, čime smo ostvarili sve svoje ciljeve. Zlatne medalje su osvojili *Patrik Papac*, kojeg je od savršenog rezultata dijelio jedan bod, i *Petar Nizić-Nikolac*, srebrnu *Lukas Novak*, a brončane *Luka Banović*, *Ivan Sinčić* i *Tadej Petar Tukara*.

Austrija se pokazala kao izvrstan domaćin natjecanja. Organizacija je bila veoma precizna, a raspored u detalje isplaniran. Ostatak vremena nakon natjecanja proveli smo uz slobodne aktivnosti, izlete i druženje s drugim natjecateljima.

Tadej Petar Tukara

Zadaci s pojedinačnog natjecanja, 24. kolovoza 2016.

I-1. Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi za koje vrijedi

a) $x_j > -1$ za $j = 1, 2, \ldots, n$ i

b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Dokaži nejednakost

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

i odredi kada se postiže jednakost.

I-2. Na ploči je napisano $n \geqslant 3$ prirodnih brojeva. Potez se sastoji od odabira triju brojeva a, b, c s ploče koji predstavljaju duljine stranica nedegeneriranog nejednakostraničnog trokuta i zamjene tih brojeva s $a+b-c$, $b+c-a$ i $c+a-b$. Dokaži da ne može postojati beskonačni niz takvih poteza.

I-3. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da $\sphericalangle BAC > 45^\circ$ sa središtem opisane kružnice O. Točka P leži u njegovoj unutrašnjosti tako da A, P, O, B leže na istoj kružnici i tako da je pravac BP okomit na pravac CP. Točka Q leži na dužini $\overline{BP}$ tako da je pravac AQ paralelan pravcu PO. Dokaži da je $\sphericalangle QCB = \sphericalangle PCO$.

I-4. Nađi sve funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takve da $f(a) + f(b)$ dijeli $2(a+b-1)$ za sve a, $b \in \mathbf{N}$.

Napomena. $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označava skup prirodnih brojeva.

Zadaci s ekipnog natjecnaja, 25. kolovoza 2016.

T-1. Odredite sve trojke (a, b, c) realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$a^2 + ab + c = 0,$$
$$b^2 + bc + a = 0,$$
$$c^2 + ca + b = 0.$$

T-2. Neka $\mathbf{R}$ označava skup realnih brojeva. Odredite sve funkcije $f \to \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

vrijedi za sve realne brojeve x i y.

T-3. Zemljište kvadratnog oblika dimenzija 8×8, čije su stranice orijentirane sjever-jug i istok-zapad, podijeljeno je na 64 manje kvadratne parcele dimenzija 1×1. Na svakoj od tih parcela može se nalaziti najviše jedna kuća. Svaka pojedina kuća može se nalaziti unutar samo jedne 1×1 parcele.

Za kuću kažemo da je *u sjeni* ako se na svakoj od tri parcele koje su joj neposredno susjedne s istoka, zapada i juga nalazi po jedna kuća.

Odredite najveći broj kuća koje se istovremeno mogu nalaziti na zemljištu, a da pritom niti jedna nije u sjeni.

Napomena. Po definiciji, kuće na istočnom, zapadnom i južnom rubu zemljišta nikada nisu u sjeni.

T-4. Učenici nekog srednjoškolskog razreda pisali su ispit. Na svakom pitanju mogao se dobiti ili 1 bod za točan odgovor, ili 0 bodova za netočan odgovor. Poznato je da je na svako pitanje točno odgovorio barem jedan učenik te da nisu svi učenici ostvarili jednak ukupni rezultat na ispitu.

Dokažite da na testu postoji pitanje sa sljedećim svojstvom: Prosjek ukupnih rezultata učenika koji su na to pitanje odgovorili točno je veći od prosjeka ukupnih rezultata onih učenika koji su na njega odgovorili netočno.

T-5. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| \neq |AC|$, te neka mu je O središte opisane kružnice. Pravac AO siječe kružnicu ω opisanu trokutu ABC drugi put u točki D, a pravac BC u točki E. Kružnica opisana trokutu CDE siječe pravac CA drugi put u točki P. Pravac PE siječe pravac AB u točki Q. Pravac kroz O paralelan pravcu PE siječe visinu trokuta ABC koja prolazi kroz A u točki F. Dokažite da je $|FP| = |FQ|$.

T-6. Neka je ABC trokut u kojem je $|AB| \neq |AC|$. Točke K, L, M su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, redom. Kružnica upisana trokutu ABC sa središtem I dira stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pravac g, koji prolazi polovištem dužine $\overline{ID}$ i okomit je na IK, siječe pravac LM u točki P.

Dokažite da je $\sphericalangle PIA = 90^\circ$.

T-7. Kažemo da je prirodan broj n *Mozartov broj* ako je za zapis niza brojeva $1, 2, \ldots, n$ (u dekadskom sustavu) svaku znamenku potrebno napisati paran broj puta. Dokažite:

a) Svi Mozartovi brojevi su parni.

b) Postoji beskonažno mnogo Mozartovih brojeva.

T-8. Promatramo jednadžbu $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, pri čemu su a, b, c prirodni brojevi. Dokažite:

a) Ne postoji rješenje (a, b, c) za $n = 2017$.

b) Za $n = 2016$, a mora biti djeljiv s 3 za svako rješenje (a, b, c).

c) Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja (a, b, c) za $n = 2016$.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 5 sati.

Vrijeme za postavljanje pitanja: 60 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.