Međunarodno matematičko natjecanje “Klokan bez granica” 2016. g., II. dio

Zadaci za učenike 2. i 3. razreda srednje škole (Juniors)

Pitanja za 3 boda:

1. Aritmetička sredina četiri broja iznosi 9. Koji je četvrti broj ako su tri broja 5, 9 i 12?

A. 6 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10 **E.** 36

2. Koji je od danih brojeva najbliži rezultatu izraza $\dfrac{17 \cdot 0.3 \cdot 20.16}{999}$?

A. 0.01 **B.** 0.1 **C.** 1 **D.** 10 **E.** 100

3. Ruta je na ispitu koji se sastoji od 30 pitanja imala 50% više točnih odgovora nego netočnih. Svaki njen odgovor bio je ili točan ili netočan. Koliko je točnih odgovora Ruta imala ako pretpostavimo da je odgovorila na sva pitanja?

A. 10 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 18 **E.** 20

4. Četiri točke od pet ponuđenih predstavljaju vrhove kvadrata u pravokutnom koordinatnom sustavu. Koja točka nije vrh tog kvadrata?

A. $(-1,3)$ **B.** $(0,-4)$ **C.** $(-2,-1)$ **D.** $(1,1)$ **E.** $(3,-2)$

5. Podijelimo li prirodan broj x brojem 6 ostatak je 3. Koliko je ostatak ako broj $3x$ podijelimo brojem 6?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1 **E.** 0

6. Mali Luka osmislio je svoj način zapisivanja negativnih brojeva prije nego je naučio uobičajeni način (s minusom ispred broja). Brojeći unazad ovako bi on zapisao: ..., 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000,... Koji je rezultat izraza $000 + 0000$ u njegovoj notaciji?

A. 1 **B.** 00000 **C.** 000000 **D.** 0000000 **E.** 00000000

7. Imam neobične igraće kocke: prikazani su brojevi od 1 do 6 na uobičajeni način uz iznimku da su neparni brojevi negativni (-1, -3, -5 su na mjestima brojeva 1, 3, 5). Bacim li *dvije* takve igraće kocke koji se od danih zbrojeva ne može pojaviti?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7 **E.** 8

8. Sven je na ploču napisao pet različitih jednoznamenkastih prirodnih brojeva. Otkrio je da suma nikoja dva nije 10. Koji je od danih brojeva Sven sigurno napisao na ploču?

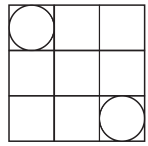
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

Pitanja za 4 boda:

9. Neka je $a+5=b^2-1=c^2+3=d-4$. Koji je od brojeva a, b, c, d najveći?

A. a **B.** b **C.** c **D.** d **E.** Nije moguće odrediti.

10. Tablica 3×3 sastoji se od 9 jediničnih kvadrata. Dvije kružnice upisane su u dva kvadrata kao na slici. Kolika je udaljenost između tih dviju kružnica?

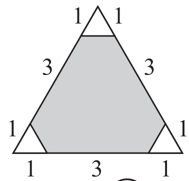


A. $2\sqrt{2}-1$ **B.** $\sqrt{2}+1$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** 2 **E.** 3

11. Na eliminacijskom teniskom turniru šest rezultata četvrtfinala, polufinala i finala (ne nužno u tom redoslijedu) je: Krasna je pobijedila Anu, Selena je pobijedila Danu, Tina je pobijedila Svetu, Tina je pobijedila Selenu, Selena je pobijedila Krasnu i Ema je pobijedila Saru. Koji rezultat nedostaje?

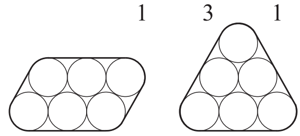
A. Tina je pobijedila Krasnu. **B.** Selena je pobijedila Anu.
C. Ema je pobijedila Selenu. **D.** Krasna je pobijedila Svetu.
E. Tina je pobijedila Emu.

12. Koliki postotak površine trokuta na slici je osjenčan?



A. 80% **B.** 85% **C.** 88% **D.** 90%
E. Nije moguće odrediti.

13. Rajko želi šest cijevi kružnog profila dijametra 2 cm obuhvatiti elastičnom vrpcom. Odlučuje se između dvije opcije prikazane na slici. Usporedi duljine potrebnih vrpci.

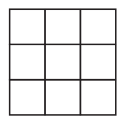


A. Vrpca na lijevoj slici je π cm kraća.
B. Vrpca na lijevoj slici je 4 cm kraća.
C. Vrpca na desnoj slici je π cm kraća.
D. Vrpca na desnoj slici je 4 cm kraća.
E. Obje su vrpce jednake duljine.

14. U osam neoznačenih omotnica nalaze se brojevi: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Eva nasumično odabire nekoliko omotinica. Alisa uzima ostale omotnice. Obje zbroje brojeve koje su izvukle. Evina suma je za 31 veća od Alisine. Koliko je omotnica Eva uzela?

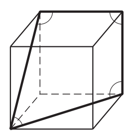
A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

15. Petar želi ćelije 3×3 kvadrata obojiti tako da u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale budu tri ćelije različitih boja. Koliko najmanje boja Petar može upotrijebiti?



A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 7

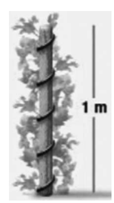
16. Na slici je kocka i označena su četiri kuta. Koliki je zbroj tih kutova?



A. 315° **B.** 330° **C.** 345° **D.** 360° **E.** 375°

Pitanja za 5 bodova:

17. Biljka se zamotala točno pet puta oko stupa visine 1 m i opsega 15 cm, kao na slici. Kako se penjala visina joj se jednoliko povećavala. Kolika je duljina biljke?



A. 0.75 m **B.** 1 m **C.** 1.25 m **D.** 1.5 m **E.** 1.75 m

18. Put glisera nizvodno od mjesta X do mjesta Y traje 4 sata. Uzvodno, od Y do X, put traje 6 sati. Koliko bi sati bilo potrebno da struja odnese kladu od mjesta X do mjesta Y (ako pretpostavimo da klada nesmetano putuje)?

A. 5 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 20 **E.** 24

19. U Republici Klokanova svaki mjesec ima 40 dana. Dani su numerirani od 1 do 40. Svi dani čiji je broj djeljiv sa 6 je blagdan. Svaki dan čiji broj je prost je blagdan.

Koliko se puta mjesečno pojavi samo jedan radni dan između dva blagdana?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

20. Dvije visine u trokutu imaju duljine 10 cm i 11 cm. Koji od danih brojeva ne može biti duljina treće visine?

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 10 **E.** 100

21. Jakov je zapisao četiri uzastopna prirodna broja. Zatim je izračunao 4 moguća zbroja uzimajući po tri od tih brojeva. Niti jedan od tih zbrojeva nije bio prost broj. Koji je najmanji broj kojeg je Jakov mogao zapisati?

A. 12 **B.** 10 **C.** 7 **D.** 6 **E.** 3

22. Četvero sportaša i sportašica – skijaš, brzi klizač, hokejaš i snowboarder – večera za okruglim stolom. Skijaš sjedi Andreji slijeva. Brzi klizač sjedi nasuprot Borne. Eva i Filip sjede jedno do drugog. Žena sjedi hokejašu slijeva. Kojim se sportom bavi Eva?

A. brzim klizanjem **B.** skijanjem **C.** hokejom **D.** snowboardingom **E.** Nije moguće odrediti.

23. Datumi se mogu zapisati u obliku DD.MM.GGGG. Primjerice, današnji datum je 17.03.2016. Datum nazivamo "iznenađujućim" ako je svih 8 znamenki u ovom obliku zapisa različito. U kojem će se mjesecu u budućnosti pojaviti prvi "iznenađujući" datum?

A. U ožujku. **B.** U lipnju. **C.** U srpnju. **D.** U kolovozu. **E.** U prosincu.

24. Na jednoj konferenciji je 2016 sudionika registrirano od S1 do S2016. Svaki od sudionika S1 do S2015 rukovao se s točno onoliko sudionika koliki je njihov registracijski broj. S koliko se sudionika rukovao sudionik S2016?

A. 1 **B.** 504 **C.** 672 **D.** 1008 **E.** 2015

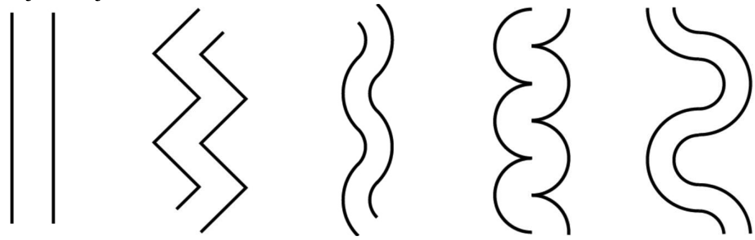
Zadaci za učenike 4. razreda srednje škole (Students)

Pitanja za 3 boda:

1. Zbroj godina Tome i Ivana je 23, zbroj godina Ivana i Aleksandra je 24, a zbroj godina Tome i Aleksandra je 25. Koliko godina ima najstariji od njih?

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13 **E.** 14

2. Marija želi sagraditi most preko rijeke i zna da je najkraći mogući most za bilo koju točku s jedne strane rijeke uvijek iste duljine. Koja od danih slika ne može biti slika njene rijeke?

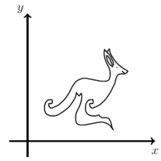


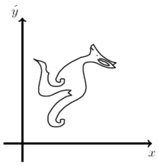
A. **B.** **C.** **D.** **E.**

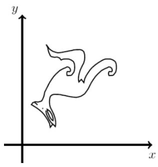
3. Koliko je cijelih brojeva veće od $2015 \cdot 2017$ i manje od $2016 \cdot 2016$?

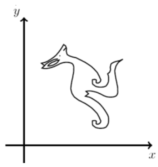
A. 0 **B.** 1 **C.** 2015 **D.** 2016 **E.** 2017

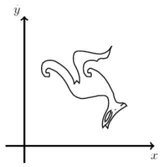
4. Skup točaka u xy-ravnini tvori sliku klokana, kao na slici. Ako zamijenimo x i y koordinatu za svaku točku koja će od danih slika prikazivati rezultat?

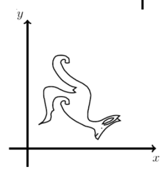






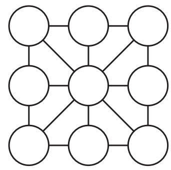






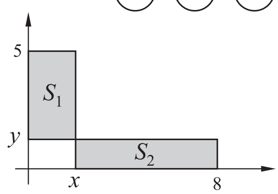
A. **B.** **C.** **D.** **E.**

5. Dijana želi upisati devet prirodnih brojeva u krugove na dijagramu tako da sume brojeva u vrhovima svakog od osam malih trokuta koje tvore bridovi budu identične. Koji je najveći broj različitih prirodnih brojeva koje ona može koristiti?



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5 **E.** 8

6. Pravokutnici S_1 i S_2 na slici imaju iste površine. Odredi omjer $\frac{x}{y}$.

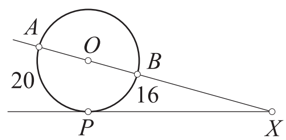


A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{7}{4}$ **E.** $\frac{8}{5}$

7. Ako je $x^2 - 4x + 2 = 0$, odredi $x + \frac{2}{x}$.

A. -4 **B.** -2 **C.** 0 **D.** 2 **E.** 4

8. Duljine lukova AP i PB na slici su 20 i 16. Koliko iznosi mjera kuta $\sphericalangle PXA$?



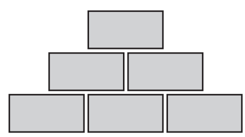
A. 30° **B.** 24° **C.** 18° **D.** 15° **E.** 10°

Pitanja za 4 boda:

9. Za prirodne brojeve a, b, c, d vrijedi $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Koji je od ovih brojeva najveći?

A. a **B.** b **C.** c **D.** d **E.** Nije moguće odrediti.

10. U ovoj piramidi brojeva svako gornje polje produkt je dvaju polja direktno ispod njega. Koji se od danih brojeva ne može pojaviti na vrhu piramide, ako se u donja tri polja nalaze prirodni brojevi veći od 1?



A. 56 **B.** 84 **C.** 90 **D.** 105 **E.** 220

11. Ako je $x_1 = 2$ i $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ za $n \geq 1$ koliko iznosi x_4?

A. 2^{2^3} **B.** 2^{2^4} **C.** $2^{2^{11}}$ **D.** $2^{2^{16}}$ **E.** $2^{2^{768}}$

12. U pravokutniku $ABCD$ duljina stranice $\overline{BC}$ jednaka je polovici duljine dijagonale $\overline{AC}$. Neka je M točka na stranici $\overline{CD}$ takva da je $|AM| = |MC|$. Kolika je mjera kuta $\sphericalangle CAM$?

A. 12.5° **B.** 15° **C.** 27.5° **D.** 42.5° **E.** Ništa od navedenog.

13. Danka je razrezala pravokutnik površine 2016 na 56 jednakih kvadrata. Koliko postoji različitih pravokutnika površine 2016 koje je moguće razrezati na 56 jednakih kvadrata?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8 **E.** 0

14. Na otoku Viteza i Lupeža žive samo dva tipa ljudi: Vitezovi (koji uvijek govore istinu) i Lupeži (koji uvijek lažu). Na svom putovanju po otoku sretneš 7 ljudi koji sjede oko logorske vatre. Svaki od njih reče: "Sjedim između dva Lupeža!". Koliko Lupeža sjedi oko vatre?

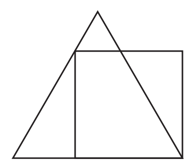
A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** Nije moguće odrediti.

15. Jednadžbe $x^2+ax+b=0$ i $x^2+bx+a=0$ imaju realna rješenja. Znamo da je zbroj kvadrata rješenja prve jednadžbe jednak zbroju kvadrata rješenja druge jednadžbe i da je $a \neq b$. Koliko tada iznosi $a+b$?

A. 0 **B.** -2 **C.** 4 **D.** -4 **E.** Nije moguće odrediti.

16. Ako je opseg kvadrata na slici jednak 4, koliki je opseg jednakostraničnog trokuta na slici?

A. 4 **B.** $3+\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $3+\sqrt{2}$ **E.** $4+\sqrt{3}$



Pitanja za 5 bodova:

17. Koliko različitih realnih rješenja ima jednadžba $(x^2-4x+5)^{x^2+x-30}=1$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** beskonačno

18. Četverokutu je upisana kružnica (svaka stranica četverokuta tangenta je te kružnice). Omjer opsega čeverokuta i opsega kružnice iznosi $4:3$. Koliki je tada omjer površine četverokuta i površine kruga omeđenog tom kružnicom?

A. $4:\pi$ **B.** $3\sqrt{2}:\pi$ **C.** $16:9$ **D.** $\pi:3$ **E.** $4:3$

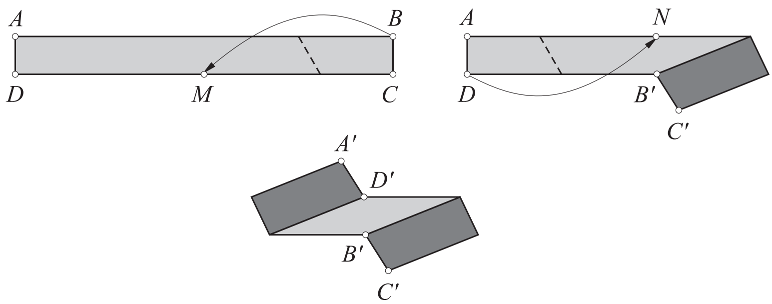
19. U pravokutnom se trokutu ABC (pravi kut je kod vrha A) simetrale šiljastih kutova sijeku u točki P. Ako je udaljenost točke P od hipotenuze $\sqrt{8}$, kolika je udaljenost točke P od vrha A?

A. 8 **B.** 3 **C.** $\sqrt{10}$ **D.** $\sqrt{12}$ **E.** 4

20. Kocka je razrezana na 6 piramida tako što smo danu točku unutar kocke povezali sa svakim vrhom kocke. Volumeni pet od tih pramida su 2, 5, 10, 11 i 14. Koliki je volumen šeste piramide?

A. 1 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 9 **E.** 12

21. Pravokutna papirnata traka širine 5 cm i dužine 50 cm s jedne je strane svijetla, a s druge tamna. Kristina presavine traku tako da vrh B padne u polovište M stranice $\overline{CD}$. Zatim presavine traku tako da vrh D padne u polovište N stranice $\overline{AB}$. Kolika je površina (u cm^2) vidljivog svijetlog dijela na posljednjoj slici?

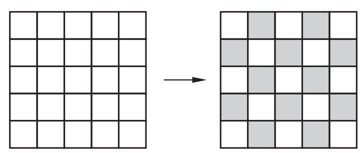


A. 50 **B.** 60 **C.** 62.5 **D.** 100 **E.** 125

22. Ana je izabrala prirodan broj n i zapisala sumu svih prirodnih brojeva od 1 do n. Prost broj p djelitelj je te sume, ali nije djelitelj niti jednog sumanda. Koji bi od danih brojeva mogao biti $n+p$?

A. 217 **B.** 221 **C.** 229 **D.** 245 **E.** 269

23. Kvadrat (5×5) podijeljen je na 25 polja. Sva polja su na početku bijela. U svakom potezu je dozvoljeno promijeniti boju trima uzastopnim poljima u retku ili stupcu u suprotnu boju (bijela polja postaju crna, a crna bijela). Koliko nam najmanje poteza treba kako bi dobili šahovnicu kao na slici?



A. manje od 10 **B.** 10 **C.** 12 **D.** više od 12 **E.** To nije moguće.

24. Prirodan broj N ima točno šest različitih djelitelja uključujući 1 i N. Produkt pet od tih djelitelja je 648. Koji od danih brojeva je šesti djelitelj broja N?

A. 4 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 12 **E.** 24

Rješenja

Juniors

1. B	2. E	3. B	4. E	5. B	6. E	7. A	8. D
9. C	10. C	11. A	12. B	13. D	14. B	15. D	16. E
17. A	18. C	19. D	20. C	21. B	22. D	23. B	24. B

Students

1. E	2. A	3. A	4. A	5. D	6. D	7. B	8. E
9. C	10. D	11. E	12. C	13. B	14. A	15. C	16. C
17. D	18. A	19. D	20. C	21. E	22. B	23. D	24. D