

Ljetni kamp mladih matematičara 2016. g.

Ovogodišnji Ljetni kamp mladih matematičara, u organizaciji udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", održao se od 15. do 22. kolovoza u Novom Vinodolskom. U aktivnostima kampa sudjelovao je do sada rekordan broj učenika, njih čak 71, srednjoškolaca i osnovnoškolaca koji su završili 7. ili 8. razred. Raspored je i ove godine bio prepun aktivnosti: predavanja, rad na projektima i popularno-znanstvena predavanja, ali ostalo je i dovoljno vremena za zabavu.



Slika 1. Sudionici Ljetnog kampa mladih matematičara 2016.

U jutarnjim satima polaznici su slušali predavanja o raznim natjecateljskim temama iz kombinatorike, algebre, geometrije i teorije brojeva. Zbog velikog broja sudionika, svakog se dana održavalo šest predavanja: dva za osnovnu i četiri za srednju školu. Predavanja su različite težine i zahtijevala različito predznanje, tako da nešto novo mogu naučiti i potpuni početnici u natjecateljskoj matematici, i vrhunski olimpijci (najteža predavanja bila su dio priprema za Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu).

Poslijepodneva smo provodili radeći na projektima. Glavni cilj projekata jest prikazati učenicima matematiku iz perspektive različite od one na koju su navikli. Tako na projektu radi manja grupa učenika, a naglasak je stavljen na rješavanje praktičnih problema i primjenu matematike u znanostima i stvarnom životu. Na ovom smo kampu imali čak 12 projekata: *Kriptografija*, *Platonova i Arhimedova tijela*, *Origami*, *Allianz projekt*, *Linearno programiranje*, *Teorija informacija*, *Grafika*, *Glatko kotrljanje*, *Logika i ordinali*, *Statistika*, *Matematika i glazba*, *Modeliranje u biologiji*. Na završnoj ceremoniji kampa učenici su prezentirali svoj cjelokupni rad na projektu.

Projekt *Kriptografija* bio je namijenjen učenicima mlađeg uzrasta, a cilj projekta bio je upoznati ih s osnovama kriptografije. Učili su o nekim od najpoznatijih načina kriptiranja koji su se koristili kroz povijest te o matematičkoj pozadini koja stoji iza pojedinog načina kriptiranja. Podijelili smo šifre na supstitucijske i transpozicijske. Proučavali smo prednosti i mane klasičnih metoda šifriranja, kao što su Cesarova, Vigenerova, Playfairova te ATBASH šifru. Upoznali smo učenike s idejom javnog ključa te Diffie-Hellman protokolom za razmjenu ključeva. Na kraju su učenici osmislili sami svoj način kriptiranja, a zatim su raspravljali o jačini njihove šifre te načinima dešifriranja.

Na projektu *Platonova i Arhimedova tijela* također su sudjelovali mlađi učenici. Naučili smo što su to grafovi i izveli Eulerovu formulu za planarne grafove i poliedre. Zatim smo se upoznali s Platonovim tijelima – poliedrima čije su sve strane pravilni

mnogokuti te dokazali da ih ima samo pet: tetraedar, heksaedar (kocka), oktaedar, dodekaedar i ikosaedar. Zatim smo proučavali slučaj kada su stranice poliedra pravilni mnogokuti, ali ne moraju biti jednaki (kao na primjer kod nogometne lopte) te se tako upoznali s prizmama, antiprizmama i Arhimedovim tijelima.

Projekt *Origami* sastojao se od dva dijela: teorijskog i praktičnog, a na njemu su sudjelovali učenici 8. i 1. razreda. Ciljevi projekta su bili upoznavanje učenika s korisnošću origamija u rješavanju nekih netrivialnih matematičkih problema (npr. dijeljenje papira na n jednakih dijelova, dokazivanje da ima samo pet pravilnih poliedara (Platonova tijela) i upoznavanje s načinima izrade različitih origamija. Uz teorijski dio izrađivali smo i razne vrste origamija (npr. oktaedar, *5-interlocking* tetraedar, ždral, cvijet...).

Allianz projekt rađen u suradnji s Allianz osiguranjem i cilj mu je bio educirati učenike o načinu rada takve kuće, s naglaskom na životno osiguranje. Promatrali smo tri vrste: mješovito osiguranje, osiguranje u slučaju smrti te osiguranje u slučaju doživljenja. Računali smo premije te pratili njihove promjene u odnosu na dob osiguranika te trajanje ugovora osiguranja.

Na projektu *Linearno programiranje* sudjelovali su učenici 8. i 1. razreda. Problem u linearnom programiranju definira se kao problem maksimizacije ili minimizacije linearne funkcije koja je predmet linearnih ograničenja. Ograničenja mogu biti jednakosti ili nejednakosti. Htjeli smo riješiti problem raspoređivanja učenika na kampu na projekte po ocjenama kako bi svi bili što sretniji. Cilj je bio maksimizirati "funkciju sreće" koja je suma ocjena koje su sudionici dali za projekt za koji su izabrani. Naši su se rezultati, iako smo imali samo dio podataka s kampa, uglavnom preklapali sa stvarnim odabirom učenika.

Projekt *Teorija informacija* bio je prilagođen za 1. i 2. razred srednje škole. Cilj projekta je bio što sažetije prenijeti poruku od pošiljatelja do primatelja kroz kanal koji ima različit jezik od primatelja i pošiljatelja. Bavio se kompresijom i vrstama kompresije (Shannonov, Shannon-Fano i Hoffmanov algoritam i aritmetičko kodiranje). Proučavala se efikasnost pojedinih algoritama. Najzanimljiviji dio projekta jest činjenica da se projekt bavio primjenom matematike na konkretnom problemu.

Na projektu *Grafika*, prilagođenom starijem uzrastu, promatrao se problem promjene oblika slova (na primjer, dobivanje zakošenih fontova slova) u računarskoj grafici. U tu su se svrhu učenici upoznali s osnovnim pojmovima linearne algebre – pojmom vektorskog prostora, linearne nezavisnosti i baze vektorskog prostora te pojmom linearnog operatora. Glavni dio projekta sveo se na opisivanje poznatih preslikavanja ravnine i prostora pomoću linearnih operatora i njihovih matricnih zapisa te uočavanje nekih osnovnih rezultata vezanih uz matricni zapis linearnog operatora. Sva stečena znanja učenici su na kraju primijenili i na već spomenuti problem oblikovanja slova.

Cilj projekta *Glatko kotrljanje* bio je proučiti svojstva i uvjete glatkog kotrljanja, to jest kotrljanja gdje je trenje dovoljno veliko da tijelo ne prokliže i gdje se energija troši samo na savladavanje trenja i tromost. Htjeli smo odrediti po kakvoj će se cesti glatko kotrljati pravilni mnogokuti i ostali likovi (kardioida, spirala...). Rješavanjem diferencijalnih jednadžbi dobivaju se modeli cesta koje smo kasnije i primijenili u praksi gradnje cesta od glinamola. Projekt je bio namijenjen starijim učenicima.

Projekt *Logika i ordinali* bio je namijenjen srednjoškolskom uzrastu. Počeli smo s upoznavanjem skupova, proučavali kardinalnost te konstruirali bijekcije između različitih skupova brojeva. Zatim smo prešli na malo zahtjevniji dio, ordinale (redne tipove), koji nam omogućuju da "poredamo" elemente konačnih i beskonačnih skupova. Nakon teorijskih osnova o ordinalima, prešli smo na rješavanje različitih logičkih igara koje za odgovor imaju neki ordinal. Na kraju smo generalizirali i pomoću jednostavnog algoritma napravili program u "Pythonu" koji prevodi ordinale u igru te obratno u programskom jeziku C++. Nakon toga smo se bavili vektorskim prostorom te naučili dosta novih

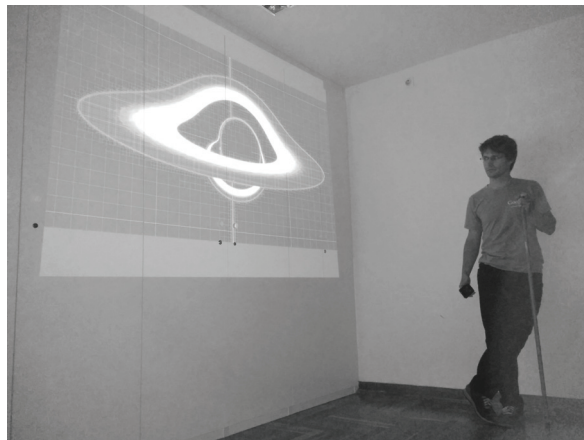
pojmovna kao što su: skup izvodnica, linearno nezavisan skup te baza vektorskog prostora. Proučavali smo i grupe, prstenove te polja. Na samom kraju projekta smo transfinitnom indukcijom proširili rješenja Cauchyve funkcijske jednadžbe.

Na projektu *Statistika* naučili smo osnove vjerojatnosti te neke jednostavne statističke testove koji se koriste u raznim znanostima. Proučavali smo binomnu i geometrijsku slučajnu varijablu te im izračunali očekivanje. Upoznali smo se s pojmom p -vrijednosti te smo izveli egzaktni i simulacijski test za očekivanje binomne slučajne varijable te ih iskoristili za neke prave podatke o broju djece u obiteljima polaznika kampa. Naučili smo računati i intervale pouzdanosti za očekivanje. Na kraju smo testirali pojavljuju li se u decimalnom zapisu broja π sve znamenke jednako često i upozorili na probleme kod testiranja previše hipoteza. Projekt je bio namijenjen starijim učenicima, sa završenim 2. ili 3. razredom srednje škole.

Na projektu *Matematika i glazba* stvarali smo novu glazbu pomoću Markovljevih lanaca. Ideja je bila da se u već postojećim skladbama analiziraju prijelazi iz tona u ton, te zatim nova glazba generira prema dobivenoj prijelaznoj matrici vjerojatnosti (primjerice ako je u originalnoj skladbi ton C u $2/3$ slučajeva prešao u D, a u $1/3$ u G, sada će svi tonovi C prelaziti u D s vjerojatnošću $2/3$, a u G s vjerojatnošću $1/3$). Na taj način dobili smo glazbu koja zvuči bolje nego slučajno generirana, jer je “naučila” koji prijelazi zvuče dobro. Nakon igranja s ritmom, različitim instrumentima i vrstama glazbe, pokušali smo zapisati harmonijska pravila slaganja tonova kao prijelaznu matricu vjerojatnosti te tako stvorili višeglasnu skladbu. Rezultat je bio izvanredan, a možete ga poslušati na stranici kampa.

Projekt *Modeliranje u biologiji* bio je namijenjen učenicima koji su završili 2. i 3. razred. Projekt se sastojao od upoznavanja učenika s osnovnim modelima populacija, derivacijama i diferencijalnim jednadžbama kao načinom postavljanja modela. Kasnije su učenici sami primjenjivali stečena znanja na konkretnim problemima *Zombie apokalipsa* i *Ratovi plemena* te su simulirali postavljene modele koristeći *Small Basic*.

U poslijepodnevnom su se satima, umjesto rada na projektima, članovi hrvatske ekipe pripremali za nadolazeću Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu. Njihov su program osmislili bivši olimpijci u suradnji s voditeljima ekipe, *Petrom Bakićem* i *Stipom Vidakom*, koje smo ugostili na nekoliko dana kako bi pripreme bile što uspješnije. Tjedan pun teških predavanja i simulacija natjecanja se isplatio – hrvatska je ekipa opet ostvarila vrhunske rezultate i u pojedinačnoj i ekipnoj konkurenciji.



Slika 2. Predavanje Ivice Kičića: adaptirana metoda za crtanje gdje se preciznije crtaju rubovi i više zakrivljeni dijelovi.

Matematike nije nedostajalo ni u večernjim satima: u srijedu navečer posjetio nas je naš dragi prijatelj i bivši član udruge *Ivica Kičić* te učenicima održao popularno-znanstveno predavanje na temu: *Kako nacrtati crnu rupu*. Na predavanju smo naučili ponešto o crnim rupama, kako izgleda vjerni prikaz crne rupe te koliko su one dobro prikazane u filmskom hitu *Interstellar*.

Iako su dani bili prepuni aktivnosti, ostalo nam je dovoljno vremena za zabavu. Budući da je ovo bio prvi Ljetni kamp na moru, iskoristili smo mnoge slobodne trenutke za plivanje, ronjenje i skakanje u vodu, ali nismo zaboravili odigrati i nekoliko nogometnih utakmica. Jednu smo večer proveli igrajući pub kviz, a pobjedu je, iako tijesnu, odnio tim *Vlatko i kmetovi*, osvojivši pritom vrijedne nagrade – vječnu slavu i vrećicu kokica. Sudjelovali smo i na predstavljanju grupa gostiju Doma Crvenog križa sa zabavnom točkom u kojoj su neki od sudionika prezentirali svoje vještine u slaganju rubikovih kocaka i pričanju matematičkih viceva. Ostale smo večeri uglavnom proveli igrajući “Mafiju” i družeći se.



Slika 3. Pozdrav do sljedeće godine.

Veselimo se sljedećem Ljetnom kampu, a još više nadolazećoj Zimskoj školi matematike u siječnju!

Vlatka Vazdar