Sudoku – napredne metode rješavanja (2.3)

Žarko Čulić[1]

Opće prihvaćeno pravilo je da svaki sudoku treba imati jednoznačno rješenje, odnosno da sudoku s više točnih rješenja nije ispravan. U ovom trećem i posljednjem nastavku vezanom za jednoznačnost rješenja sudokua, obradit ćemo *uzorke višeznačnosti* (*Deadly Patterns*).

Deadly Pattern predstavlja određeni uzorak, odnosno dio mreže s kandidatima čiji razmještaj u uzorku omogućuje višestruka rješenja. Stoga ispravno zadani sudokui imaju jedan ili više dodatnih kandidata u poljima uzorka (postaju *Almost Deadly Patterns*) i upravo jedan od tih dodatnih kandidata mora biti točan da bi se izbjegla višestrukost rješenja.

Formalno *Deadly Pattern* je skup polja i njihovih kandidata takvih da:

- imaju višestruka rješenja
- svako rješenje ima isti *otisak* (*footprint*), tj. iste kandidate u istim povezanim poljima unutar skupa
- skupovi nemaju polja s istim kandidatima (nema ponavljanja istih kandidata u istim poljima skupa)

Prve dvije stavke su vezane za višestrukost rješenja, dok je treća dogovoreno ograničenje definicije na samu bit višestrukosti uzorka.

Otisak (*footprint*) uzorka riješenih polja se definira kao popis od 27 skupova (setova) svih brojeva u 9 redaka, 9 stupaca i 9 kvadrata uzorka, gdje je:

- skup $1 =$ brojevi u retku A uzorka
- skup $2 =$ brojevi u retku B uzorka
- ...
- skup $9 =$ brojevi u retku I uzorka
- skupovi 10 do $18 =$ brojevi u stupcima 1 do 9 u uzorku
- skupovi 19 do $27 =$ brojevi u kvadratima I do IX u uzorku

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	◦	◦	2	◦	◦	◦	◦	◦
B	2	◦	◦	3	◦	◦	◦	◦	◦
C	3	◦	◦	1	◦	◦	◦	◦	◦
D	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦
E	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦
F	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦
G	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦
H	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦
I	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦

Slika 1.

Rješenje određenog *otiska* (*footprinta*) je bilo koji razmještaj brojeva u istim povezanim poljima redaka, stupaca i kvadrata unutar uzorka. Uzorak čiji *otisak* ima više od jednog rješenja nije moguće jednoznačno riješiti. Vrijedi i obratno. To su s gledišta autora ili nekog tko istražuje rješenje mreže, tzv. *neizbježni skupovi* (*Unavoidable Sets*): skupovi polja čija se rješenja mogu promijeniti bez promjene njihovog *otiska*.

Pogledajmo primjer na slici 1.

Sudoku na slici 1 ima sljedeći *otisak* (*footprint*) za uzorak u označenih 6 polja:

[1] Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: `zculic@math.hr`

- $\{1,2\}$ u retku A
- $\{2,3\}$ u retku B
- $\{1,3\}$ u retku C
- $\{1,2,3\}$ u stupcu 1
- $\{1,2,3\}$ u stupcu 4
- $\{1,2,3\}$ u kvadratu I
- $\{1,2,3\}$ u kvadratu II
- sve ostali redci, stupci i kvadrati su prazni

Uzorak s ovakvim *otiskom* ima dva rješenja koja su prikazana na slikama 1 i 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2	○	○	1	○	○	○	○	○
B	3	○	○	2	○	○	○	○	○
C	1	○	○	3	○	○	○	○	○
D	○	○	○	○	○	○	○	○	○
E	○	○	○	○	○	○	○	○	○
F	○	○	○	○	○	○	○	○	○
G	○	○	○	○	○	○	○	○	○
H	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○ I	○	○	○	○	○	○	○	○	○

Slika 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		1			2				
B			2		1				
C									
D		2	1						
E									
F									
G									
H									
I									

Slika 3.

Pogledajmo sljedeći primjer na slici 3. Ako nema početno zadanih brojeva (*givens*) u ovih 6 polja, rješavač sudokua neće znati kako da riješi mrežu, odnosno gdje da stavi broj 1, a gdje broj 2. Zaključak je da sudoku ima dva rješenja. Stoga je nužno, tj. neizbježno (*unavoidable*) da autor sudokua stavi bar jedan *givens* u tih 6 polja.

Minimalni *Unavoidable Sets* (oni koji ne sadrže manje *neizbježne skupove*) i *Deadly Patterns* su dva pogleda na isti fenomen, budući da se *Deadly Patterns* može također promatrati kao skup polja i njihovih kandidata čija su rješenja minimalni *Unavoidable Sets*.

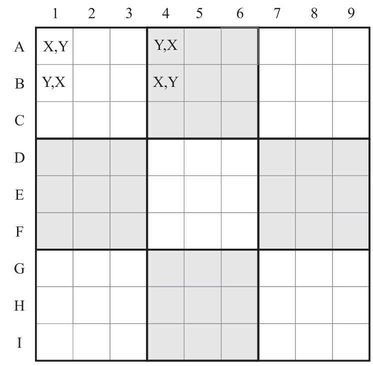
Teorija o *Unavoidable Sets* kazuje sljedeće:

- postoje tisuće različitih vrsta *Deadly Patterns* (skraćeno *DP*)
- najmanji skup sadrži 4 polja (to su *jednoznačni pravokutnici* koje smo obradili u prvom nastavku)
- najveći skup sadrži najmanje 60 polja (što je neupotrebljivo u praksi)
- ako u n polja postoji $DP(n)$ tipova *Deadly Patterns* tada je $DP(4) = 1$, $DP(5) = 0$, $DP(6) = 4$, $DP(7) = 0$, $DP(8) = 9$, $DP(9) = 3$, $DP(10) > 46, \ldots$
- svi *Deadly Patterns* koji sadrže manje od 30 polja sastoje se isključivo od polja s parovima (samo dva) kandidata

Budući da je $DP(n)$ za $n < 10$ relativno mali možemo prikazati sve takve uzorke. X, Y, Z i W predstavljaju na slikama kandidate, odnosno bilo koje brojeve između 1 i 9, a u primjerima su postavljeni tako da su točni ili svi lijevi ili svi desni kandidati u svakom polju u uzorku. Uzorci se mogu nalaziti bilo gdje u mreži, ali treba paziti da broj redaka, stupaca i kvadrata bude isti kao i u prikazanim primjerima.

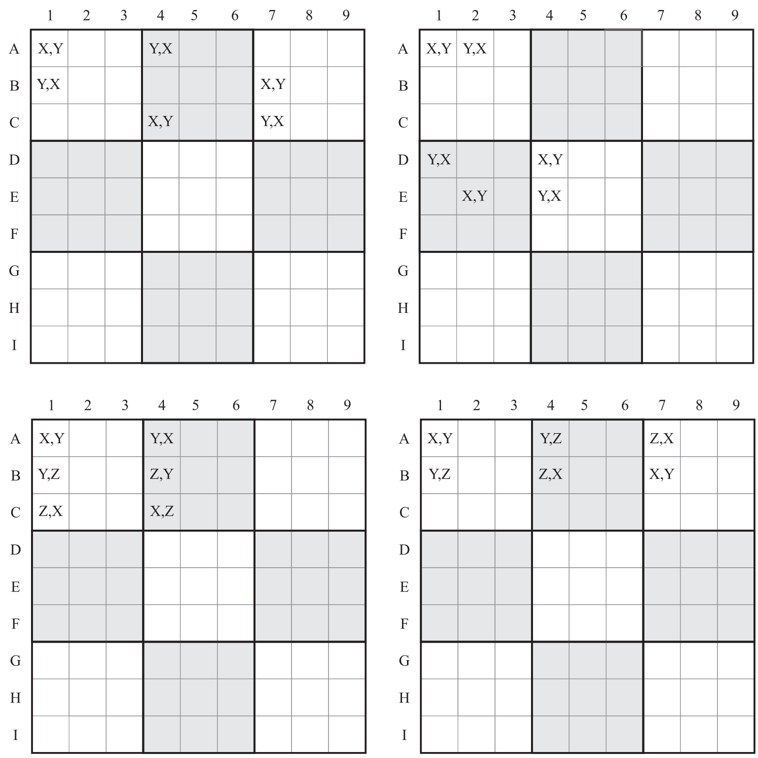
1. ***DP* u 4 polja** (jedna konfiguracija):

Prikazani uzorak se može nalaziti bilo gdje u mreži, ali mora zadovoljavati uvjet da se polja uzorka nalaze u točno 2 retka, točno 2 stupca i točno 2 kvadrata. Vidimo da *DP* u 4 polja predstavlja upravo *jednoznačne pravokutnike* (*Unique Rectangles*, *UR*) koje smo obradili u prvom nastavku jer su to najčešći i najlakše uočljivi *uzorci višeznačnosti*.



Slika 4.

2. ***DP* u 6 polja** (četiri konfiguracije):



Slike 5 do 8.

U prve dvije konfiguracije isti par kandidata X i Y se nalazi u točno 3 retka, 3 stupca i 3 kvadrata, dok se u ostale dvije konfiguracije parovi kandidata iz trojke brojeva X, Y i Z nalaze u točno 3 retka (stupca), 2 stupca (retka) i 2 kvadrata ili u točno 2 retka (stupca), 3 stupca (retka) i 3 kvadrata.

3. ***DP* u 8 polja** (devet konfiguracija):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y			Y,X					
B		Y,X			X,Y				
C									
D	Y,X			X,Y					
E		X,Y			Y,X				
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y			Y,X					
B		Y,X					X,Y		
C				X,Y			Y,X		
D	Y,X	X,Y							
E									
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y			Y,X					
B		Y,X		X,Y					
C									
D	Y,X				X,Y				
E		X,Y			Y,X				
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y			Y,X					
B		Y,X		X,Y					
C									
D	Y,X						X,Y		
E		X,Y					Y,X		
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y	Y,Z		Z,X					
B			Z,X	X,Z					
C									
D	Y,X	Z,Y	X,Z						
E									
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y			Y,Z			Z,X		
B		Y,X		Z,Y			X,Z		
C									
D	Y,X	X,Y							
E									
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y			Y,W			W,X		
B	Y,Z			Z,Y					
C	Z,X			W,Z			X,W		
D									
E									
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y	Y,W		W,X					
B	Z,X	W,Z		X,W					
C									
D	Y,Z	Z,Y							
E									
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Z	Y,W		Z,Y			W,X		
B	Z,X	W,Y		Y,Z			X,W		
C									
D									
E									
F									
G									
H									
I									

Slike 9 do 17.

U prve četiri konfiguracije isti par kandidata X i Y se nalazi u točno 4 retka, 4 stupca i 4 kvadrata, a u sljedeće dvije konfiguracije parovi kandidata iz trojke brojeva X, Y i Z se nalaze u točno 3 retka (stupca), 4 stupca (retka) i 3 ili 4 kvadrata. U preostale tri konfiguracije parovi kandidata iz četvorke brojeva X, Y, Z i W se nalaze u točno 3 retka, 3 stupca i tri kvadrata, ili u točno 2 retka (stupca), 4 stupca (retka) i 3 kvadrata.

4. ***DP*** u **9 polja** (tri konfiguracije):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y			Y,X					
B		Y,Z		Z,Y					
C			Z,X	X,Z					
D	Y,X	Z,Y	X,Z						
E									
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y			Y,X					
B	Y,Z						Z,Y		
C		Z,X		X,Y			Y,Z		
D	Z,X	X,Z							
E									
F									
G									
H									
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X,Y	Y,W		W,X					
B	Z,X		W,Z	X,W					
C									
D	Y,Z	W,Y	Z,W						
E									
F									
G									
H									
I									

Slike 18 do 20.

U prve dvije konfiguracije parovi kandidata iz trojke brojeva X, Y i Z se nalaze u točno 4 retka, 4 stupca i 3 ili 4 kvadrata, a u preostaloj konfiguraciji parovi kandidata iz četvorke brojeva X, Y, Z i W se nalaze u točno 3 retka (stupca), 4 stupca (retka) i 3 kvadrata.

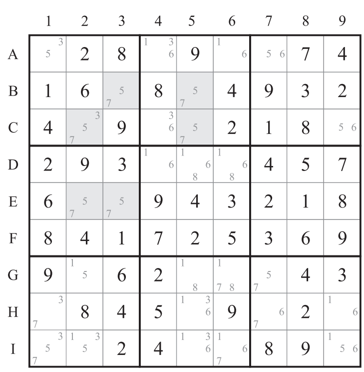
Uzorci višeznačnosti u 8 i više polja se znatno teže otkrivaju u stvarnoj mreži, tako da se u praksi najčešće koriste *uzorci višeznačnosti* u 4 i 6 polja te imaju barem jednan dodatni kandidat u barem jednom polju koji sprječava višestrukost rješenja.

Pojedini *DP*-i s dodatnim kandidatima imaju različite nazive u literaturi, ovisno o autoru. Npr. Peter Gordon koristi sljedeće nazive:

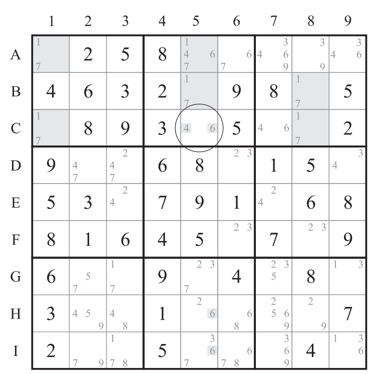
- ***Gordonian Rectangles*** = *UR tip 1* (1 dodatni kandidat u jednom polju *jednoznačnih pravokutnika*)
- ***Gordonian Rectangles Plus*** = *UR tip 1* (2+ dodatnih kandidata u jednom polju *jednoznačnih pravokutnika*)
- ***Gordonian One-Sided Rectangles*** = *UR tip 2* (isti dodatni kandidat u dva polja jednoznačnih pravokutnika)
- ***Gordonian Polygons*** = *DP* u 3 retka, 3 stupca i 3 kvadrata s 1 dodatnim kandidatom u jednom polju
- ***Gordonian Polygons Plus*** = *DP* u 3 retka, 3 stupca i 3 kvadrata s 2+ dodatnih kandidata u jednom polju
- ***Gordonian One-Sided Polygons*** = *DP* u 3 retka, 3 stupca i 3 kvadrata s istim dodatnim kandidatom u dva polja
- ***Extended Gordonian Rectangles*** = *DP* u 2 retka (stupca), 3 stupca (retka) i 3 kvadrata s 1 dodatnim kandidatom u jednom polju (drugi naziv je *Franciscan Rectangles* po autoru Francisu Heaneyu); analogno postoje i ***Extended Plus Gordonian Rectangles*** te ***One-Sided Gordonian Rectangles***.

Pogledajmo primjer na slici 21.

U poljima B35, C25 i E23 imamo *Gordonian Polygons* (*DP* u 6 polja) koji se nalazi u točno 3 retka, 3 stupca i 3 kvadrata s istim parom kandidata 5 i 7. U polju C2 se nalazi dodatni kandidat 3 koji sprječava višestrukost rješenja sudokua i upravo je taj dodatni kandidat rješenje polja C2.



Slika 21.



Slika 22.

Pogledajmo primjer *Gordonian Polygons Plus* na slici 22.

Ponovno imamo *DP* u 6 polja (A15, B58 i C18) koji se nalaze u točno 3 retka, 3 stupca i 3 kvadrata s istim parom kandidata 1 i 7. No u ovom slučaju imamo u polju A5 dva dodatna kandidata 4 i 6 od kojih jedan mora biti točan, iako ne znamo koji. Stoga možemo iz A5 eliminirati kandidate 1 i 7, a preostali kandidati 4 i 6 zajedno s poljem C5 čine *zaključani set* (*par brojeva*), pa možemo eliminirati brojeve 4 i 6 iz svih polja koja vide oba polja A5 i C5, konkretno broj 6 iz polja HI5.

U sljedećem primjeru na slici 23 imamo poseban slučaj s dva *DP*-a u 6 polja.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3	6	5	8	9	1	4	2	7
B	2	1	4	3 5	6	7	8	3 5	9
C	7 8	7 8	9	3 4 5	3 4	2	3 5	1	6
D	1	3	6	7	2	8	9	4	5
E	4 8	4 8	7	1	5	9	2	6	3
F	5	9	2	6	3 4	3 4	1	7	8
G	6	2	1 3	9	8	3 4 5	7	3 5	1 4
H	9	4 5	1 3	2	7	3 4 5	6	8	1 4
I	4 7	4 5 7	2	3 4	1	6	3 5	9	2

Slika 23.

Lijevo u mreži imamo *Extended Gordonian Rectangle* u 3 retka, 2 stupca i 3 kvadrata s parovima koji su povezani na jednom kandidatu. U C12 imamo parove $\{7, 8\}$ koji su preko broja 8 povezani s parovima $\{8, 4\}$ u E12, a oni su preko broja 4 povezani s parovima $\{4, 7\}$ u poljima I12. Vidimo da su početni i završni brojevi isti (broj 7) čime su u stupcima 1 i 2 iste trojke brojeva u uzorku. U polju I2 se nalazi jedan dodatni kandidat, broj 5, i upravo on mora biti rješenje tog polja jer bi u protivnom imali dva rješenja.

U istoj mreži u poljima GH369 imamo *One-Sided Extended Gordonian Rectangle* s istim dodatnim kandidatom u dva polja uzorka. To je broj 5 u GH6 i on mora biti rješenje u jednom polju, ali ne znamo u kojem. Kako nema niti jednog polja koji sadrži broj 5 i povezan je s poljima GH6, ne postoji ništa za eliminaciju.

U sljedećem nastavku ćemo započeti s analizom nove grupe metoda: *jednostavnim lancima*.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			6		2			1	
B			7			9	8		
C		2	8				9	4	
D				6		1			
E	8								3
F				4		5			
G		6	5				7	9	
H			1	2			6		
I		9			5		1		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	4	6	5	2	8	3	1	7
B	5	3	7	1	4	9	8	2	6
C	1	2	8	3	6	7	9	4	5
D	2	5	3	6	8	1	4	7	9
E	8	1	4	9	7	2	5	6	3
F	6	7	9	4	3	5	2	8	1
G	3	6	5	8	1	4	7	9	2
H	7	8	1	2	9	3	6	5	4
I	4	9	2	7	5	6	1	3	8