Jedna algebarska nejednakost

Dragoljub Milošević[1], *Alija Muminagić*

U ovom prilogu su prikazana četiri dokaza jedne algebarske nejednakosti.

Neka su a, b, c, k *pozitivni realni brojevi i* $k \geq 1$. *Tada vrijedi ova nejednakost*

$$\frac{a}{ka+b+c}+\frac{b}{a+kb+c}+\frac{c}{a+b+kc}\leq\frac{3}{k+2}.$$

Dokaz 1. Uočavamo $\dfrac{a}{ka+b+c}=\dfrac{a}{(k-1)a+(a+b+c)}=\dfrac{1}{k-1+\dfrac{a+b+c}{a}}$.

Ako lijevu stranu dane nejednakosti označimo sa S, imamo njoj ekvivalentnu

$$S=\frac{1}{k-1+\dfrac{a+b+c}{a}}+\frac{1}{k-1+\dfrac{a+b+c}{b}}+\frac{1}{k-1+\dfrac{a+b+c}{c}}\leq\frac{3}{k+2}.$$

Sada uvodimo supstituciju $\dfrac{a+b+c}{a}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{a+b+c}{b}=\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{a+b+c}{c}=\dfrac{1}{z}$, pa dobivamo

$$\begin{aligned}S&=\frac{x}{(k-1)x+1}+\frac{y}{(k-1)y+1}+\frac{z}{(k-1)z+1}\\&=\frac{1}{k-1}\left(3-\left(\frac{1}{(k-1)x+1}+\frac{1}{(k-1)y+1}+\frac{1}{(k-1)z+1}\right)\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Radi nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{1}{(k-1)x+1}+\frac{1}{(k-1)y+1}+\frac{1}{(k-1)z+1}\geq\frac{9}{(k-1)(x+y+z)+3}=\frac{9}{k+2},\tag{2}$$

zbog $x+y+z=1$.

[1] Profesor je u miru u srednjoj školi u Gornjem Milanovcu.

Iz nejednakosti (1) i (2) dobivamo $S \leq \frac{1}{k-1}\left(3-\frac{9}{k+2}\right)=\frac{3}{k+2}$, za $k>1$. Lako je provjeriti da dana nejednakost vrijedi i za $k=1$.

Dokaz 2. Za $k \geq 2$, koristeći nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine za dva pozitivna broja imamo

$$\frac{1}{\frac{k}{2}a+b}+\frac{1}{\frac{k}{2}a+c} \geq \frac{4}{ka+b+c}$$

odnosno

$$\frac{1}{ka+b+c} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ka+2b}+\frac{1}{ka+2c}\right)$$

ili

$$\frac{a}{ka+b+c} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ka+2b}+\frac{a}{ka+2c}\right).$$

Analogno dobijemo

$$\frac{b}{a+kb+c} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{kb+2c}+\frac{b}{kb+2a}\right), \quad \frac{c}{a+b+kc} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{kc+2a}+\frac{c}{kc+2b}\right).$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$S \leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{ka+2b}+\frac{b}{kb+2a}\right)+\left(\frac{b}{kb+2c}+\frac{c}{kc+2b}\right)+\left(\frac{c}{kc+2a}+\frac{a}{ka+2c}\right)\right). \tag{3}$$

Radi

$$\frac{ak}{ka+2b}+\frac{bk}{kb+2a}=\frac{k^2ab+2k(a^2+b^2)+k^2ab}{k^2ab+2k(a^2+b^2)+4ab}=1+\frac{(k^2-4)ab}{k^2ab+2k(a^2+b^2)+4ab},$$

zbog $a^2+b^2 \geq 2ab$, imamo

$$\frac{ak}{ka+2b}+\frac{bk}{kb+2a} \leq 1+\frac{k^2-4}{k^2+4k+4}=1+\frac{k-2}{k+2}=\frac{2k}{k+2}$$

tj.

$$\frac{a}{ka+2b}+\frac{b}{kb+2a} \leq \frac{2}{k+2}.$$

Analogno dobijemo

$$\frac{a}{ka+2c}+\frac{c}{kc+2a} \leq \frac{2}{k+2}, \quad \frac{b}{kb+2c}+\frac{c}{kc+2b} \leq \frac{2}{k+2}.$$

Konačno, zbrajanjem posljednje tri nejednakosti, zbog (3), imamo

$$S \leq \frac{3}{k+2}.$$

Dokaz 3. Najprije uvodimo supstituciju: $ka+b+c=x$, $a+kb+c=y$, $a+b+kc=z$. Odavde dobijemo

$$a=\frac{1}{k^2+k-2}((k+1)x-y-z), \quad b=\frac{1}{k^2+k-2}(-x+(k+1)y-z),$$

$$c=\frac{1}{k^2+k-2}(-x-y+(k+1)z).$$

Sada je

$$S = \frac{1}{k^2+k-2}\left(\frac{(k+1)x-y-z}{x}+\frac{-x+(k+1)y-z}{y}+\frac{-x-y+(k+1)z}{z}\right)$$
$$= \frac{1}{(k-1)(k+2)}\left(3(k+1)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right)$$
$$\le \frac{1}{(k-1)(k+2)}(3k+3-2-2-2)$$

tj. $S \le \dfrac{3}{k+2}$ za $k > 1$.

Dokaz 4. Iz

$$\frac{a}{ka+b+c} = \frac{1}{k}\frac{ka+b+c-(b+c)}{ka+b+c} = \frac{1}{k}\left(1-\frac{b+c}{ka+b+c}\right)$$

i analogno za preostala dva slučaja, imamo

$$S = \frac{1}{k}\left(3-\left(\frac{b+c}{ka+b+c}+\frac{c+a}{a+kb+c}+\frac{a+b}{a+b+kc}\right)\right). \tag{4}$$

Primjenom nejednakosti za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

(vidi MFL, LXIV 4 (2013.–2014.), str. 238), dobivamo

$$\frac{b+c}{ka+b+c}+\frac{c+a}{a+kb+c}+\frac{a+b}{a+b+kc}$$
$$= \frac{(b+c)^2}{(ka+b+c)(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{(a+kb+c)(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{(a+b+kc)(a+b)}$$
$$\ge \frac{(2(a+b+c))^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(2k+2)(ab+bc+ca)}$$
$$= \frac{2(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+(k-1)(ab+bc+ca)}.$$

Odavde zbog

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = (a+b+c)^2, \qquad ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

imamo

$$\frac{b+c}{ka+b+c}+\frac{c+a}{a+kb+c}+\frac{a+b}{a+b+kc} \ge \frac{2}{1+\dfrac{k-1}{3}} = \frac{6}{k+2}. \tag{5}$$

Iz nejednakosti (4) i (5) konačno je $S \le \dfrac{1}{k}\left(3-\dfrac{6}{k+2}\right) = \dfrac{3}{k+2}$.