Još jedno poboljšanje Nesbittove nejednakosti

Šefket Arslanagić[1]

U ovom radu ćemo dati još jedno poboljšanje algebraske nejednakosti koja glasi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2},\qquad (a,\,b,\,c>0) \tag{1}$$

u matematičkoj literaturi o nejednakostima poznata kao *Nesbittova nejednakost* jer ju je davne 1903. godine postavio engleski matematičar *A. M. Nesbitt* kao Problem 15114 u časopisu Educational Times (2) 3 (1903), str. 37–38 pa se zbog toga ona često naziva Nesbittova nejednakost.

U [2] je dano deset raznih dokaza ove nejednakosti, a u [3] još njih jedanaest. Nešto kasnije u [5] je dan još jedan dokaz nejednakosti (1). Recimo i to da su u [4] dana i dva poopćenja nejednakosti (1) koja glase:

$$\frac{a}{kb+c}+\frac{b}{kc+a}+\frac{c}{ka+b}\geqslant\frac{3}{1+k},\qquad (a,\,b,\,c,\,k>0) \tag{2}$$

i

$$\frac{a}{kb+rc}+\frac{b}{kc+ra}+\frac{c}{ka+rb}\geqslant\frac{3}{k+r},\qquad (a,\,b,\,c,\,k,\,r>0). \tag{3}$$

Odmah uočavamo da za $k=1$ iz (2) imamo (1), a za $k=r=1$ iz (3), (1). Recimo i to da jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Napomena 1. Uočava se da nejednakost (1) vrijedi i u slučaju kada su a, b, c nenegativni realni brojevi od kojih dva nisu istovremeno jednaki nuli. Npr. za $a=0$, $b,\,c>0$ iz (1) dobivamo

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant\frac{3}{2},$$

što je točno jer na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo nejednakost

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 2\Big(>\frac{3}{2}\Big).$$

U [3] je dano i jedno poboljšanje nejednakosti (1) za $a+b+c=1$ koje glasi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant 3-\frac{9}{2}(ab+bc+ca). \tag{4}$$

jer je

$$3-\frac{9}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}$$

$$\Big(\iff ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

$$\iff \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0\Big).$$

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Napomena 2. Ovdje smo koristili činjenicu da je nejednakost (1) homogena pa možemo uzeti da je $a+b+c=1$.

U [4] su dana još dva poboljšanja nejednakosti (1) koja glase:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{c+a}{c+a+2b}\geqslant\frac{3}{2}, \tag{5}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant 2-\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}. \tag{6}$$

Uočavamo npr., da vrijedi nejednakost:

$$2-\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\geqslant\frac{3}{2}\iff\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},\ \text{što je točno.}$$

Sada ćemo dati još jedno poboljšanje nejednakosti (1) koje glasi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{13}{6}-\frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)},\qquad (a,\,b,\,c>0). \tag{7}$$

Dokaz. Napišimo nejednakost (7) u obliku

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geqslant\frac{2}{3}\Big(1-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\Big). \tag{8}$$

Neka je

$$\begin{aligned}
S&=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}+\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}+\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\\
&=\frac{2a-b-c}{2(b+c)}+\frac{2b-c-a}{2(c+a)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)}\\
&=\frac{a-b}{2(b+c)}+\frac{b-c}{2(c+a)}+\frac{c-a}{2(a+b)}+\frac{a-c}{2(b+c)}+\frac{b-a}{2(c+a)}+\frac{c-b}{2(a+b)}\\
&=\frac{a-b}{2}\Big(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\Big)+\frac{b-c}{2}\Big(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}\Big)+\frac{c-a}{2}\Big(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\Big)\\
&=\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)},
\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}
T&=\frac{2}{3}\Big(1-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\Big)=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+c^2}\\
&=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3(a^2+b^2+c^2)}.
\end{aligned}$$

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned}
S-T&=\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)}\\
&\quad-\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3(a^2+b^2+c^2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a-b)^2\Big[\frac{1}{2(b+c)(c+a)} - \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)}\Big] \\
&\quad + (b-c)^2\Big[\frac{1}{2(c+a)(a+b)} - \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)}\Big] \\
&\quad + (c-a)^2\Big[\frac{1}{2(a+b)(b+c)} - \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)}\Big] \\
&= (a-b)^2 \cdot \frac{3(a^2+b^2+c^2) - 2(b+c)(c+a)}{6(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)} \\
&\quad + (b-c)^2 \cdot \frac{3(a^2+b^2+c^2) - 2(c+a)(a+b)}{6(c+a)(a+b)(a^2+b^2+c^2)} \\
&\quad + (c-a)^2 \cdot \frac{3(a^2+b^2+c^2) - 2(a+b)(b+c)}{6(a+b)(b+c)(a^2+b^2+c^2)} \\
&= (a-b)^2 \cdot \frac{3a^2+3b^2+c^2-2bc-2ab-2ac}{6(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)} \\
&\quad + (b-c)^2 \cdot \frac{a^2+3b^2+3c^2-2ac-2bc-2ab}{6(c+a)(a+b)(a^2+b^2+c^2)} \\
&\quad + (c-a)^2 \cdot \frac{3a^2+3c^2+b^2-2ab-2ac-2bc}{6(a+b)(b+c)(a^2+b^2+c^2)} \\
&= (a-b)^2 \cdot \frac{(a+b-c)^2+2(a-b)^2}{6(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)} \\
&\quad + (b-c)^2 \cdot \frac{(b+c-a)^2+2(b-c)^2}{6(c+a)(a+b)(a^2+b^2+c^2)} \\
&\quad + (c-a)^2 \cdot \frac{(a+c-b)^2+2(c-a)^2}{6(a+b)(b+c)(a^2+b^2+c^2)} \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

tj. $S - T \geqslant 0$, a odavde:

$$S \geqslant T,$$

što znači da nejednakost (8) vrijedi, pa vrijedi i njoj ekvivalentna nejednakost (7). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Nejednakost (7) je bolja od nejednakosti (1), jer imamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{13}{6} - \frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)} \geqslant \frac{3}{2} \\
\iff\ &\frac{2}{3} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{2}{3} \iff a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca \\
\iff\ &\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Relativno lako se pokaže nejednakost

$$\frac{13}{6} - \frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)} \geqslant 3 - \frac{9}{2}(ab+bc+ca),$$

što znači da je nejednakost (7) bolja od (4).

Ostaje otvoreno pitanje je li nejednakost (6) bolja od (4), te je li nejednakost (7) bolja od (6).

Literatura

[1] ŠEFKET ARSLANAGIĆ, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] ŠEFKET ARSLANAGIĆ, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[3] ŠEFKET ARSLANAGIĆ, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[4] ŠEFKET ARSLANAGIĆ, *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.

[5] ŠEFKET ARSLANAGIĆ, *Matematička čitanka 5*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.

[6] V. CIRTOAJE, *Algebraic Inequalities – Old and New Methodes*, GIL Publishing House, Zalau (Romania), 2006.

[7] D. S. MITRINOVIĆ, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.