ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2016. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $2/266$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 286.

A) Zadaci iz matematike

3525. Nađi sva rješenja sistema jednadžbi:

$$x^2 - y = z^2$$
$$y^2 - z = x^2$$
$$z^2 - x = y^2.$$

3526. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi takvi da je $a_i \geq -\frac{1}{4}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dokaži nejednakost

$$\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \ldots + \sqrt{4a_n+1} \leq n+2.$$

3527. Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) za koje vrijedi

$$(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4.$$

3528. Dokaži da su sve nultočke polinoma

$$z^7 + 7z^4 + 4z + 1$$

sadržane unutar kruga polumjera 2 sa središtem u ishodištu.

3529. Dane su dvije točke $A(0, -8)$ i $B(4, 0)$ u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini. Odredi sve točke C na paraboli $y = x^2$ takve da je površina trokuta ABC minimalna.

3530. Kružnica dodiruje dvije susjedne stranice kvadrata i dijeli preostale dvije na dijelove duljina 2 i 23 cm. Koliki je polumjer kružnice?

3531. Nađi vezu između duljina stranica a, b, c trokuta ABC ako vrh C, njegovo težište i polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ leže na kružnici.

3532. Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $|AB| = 2|BC|$. Na pravcu BC nalaze se točke E i F takve da vrijedi $|EB| = |BC| = |CF|$. Dokaži da su pravci AF i DE okomiti.

3533. Neka je AD simetrala kuta $\sphericalangle CAB = 120^\circ$ trokuta ABC. Dokaži jednakost

$$\frac{1}{|AD|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}.$$

3534. Za kutove trokuta ABC vrijedi $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$. Dokaži da za njima nasuprotne stranice a, b, c vrijedi jednakost

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} = 2.$$

3535. Neka su a, b dvije stranice trokuta, p duljina simetrale kuta između njih i a', b' duljine segmenata na koje simetrala dijeli treću stranicu. Dokaži jednakost $p^2 = ab - a'b'$.

3536. Duljine visina paralelograma iz vrha s tupim kutom su jednake p, q, a kut između njih je jednak α. Odredi duljinu dulje dijagonale paralelograma.

3537. Dokaži da je zbroj kvadrata duljina dijagonala trapeza jednak zbroju kvadrata duljina bočnih stranica uvećanom za dvostruki produkt duljina baza.

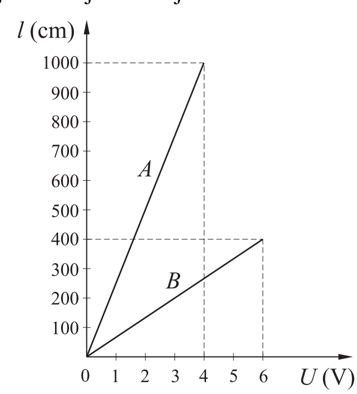
3538. Neka je p cijeli broj takav da su rješenja jednadžbe

$$5x^2 - 5px + 66p - 1 = 0$$

pozitivni cijeli brojevi. Odredi sve vrijednosti za p.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 406. U-I graf pokazuje ovisnost struje o naponu za zavojnice A i B. Obje su napravljene od istog metala i imaju istu debljinu. Koliko je puta duljina zavojnice A manja od duljine zavojnice B?



OŠ – 407. Osobni automobil je počeo pretjecati kamion s prikolicom koji se giba stalnom brzinom. U trenutku kad je započeto pretjecanje brzina automobila je bila 72 km/h, a kad je završeno brzina je iznosila 90 km/h. Pretjecanje je trajalo 4 sekunde. Kamion s prikolicom je dug 16 metara. Kolika mu je bila brzina? Pretpostavite da se osobni automobil tijekom pretjecanja jednoliko ubrzavao.

OŠ – 408. Učenici su promatrali kako valovi ljuljaju čamce u luci. Izmjerili su da se podižu svake 3 sekunde. Procijenili su da razmaci između susjednih valnih bregova iznose 80 centimetara. Kolika je frekvencija i brzina tih valova?

OŠ – 409. Posuda obujma 300 litara se puni kroz crijevo unutarnjeg promjera 2 centimetra. Brzina istjecanja vode je 1 m/s. Odredite vrijeme za koje će se posuda napuniti.

1616. Odredi početnu brzinu tijela koje jednoliko ubrzava ako se nakon pređenih 60 metara brzina povećala za 25%, a u prve dvije sekunde gibanja za 15%. Koliko je ubrzanje?

1617. U takozvanoj transfer-orbiti za geostacionarne satelite, objekt se giba oko Zemlje tako da je u perihelu 429 km iznad površine, a u ahelu 35 793 km iznad površine. Koristeći Keplerove zakone, odredi ophodno vrijeme, te brzinu u perihelu i ahelu. Za radijus Zemlje uzeti 6371 km, a za masu $5.972 \cdot 10^{24}$ kg.

1618. Koliko iznosi otpor bakrene žice ako je težina žice 1 kg (bez izolacije), a duljina 800 metara? Gustoća bakra je 8960 kg/m^3, a električna vodljivost 16.78 nΩm.

1619. Konvergentna leća oblika meniska (kao naočale) načinjena je od stakla indeksa loma 1.5. Žarišna daljina veća je 10 cm od jednog radijusa zakrivljenosti leće, a 8 cm manja od drugog radijusa. Odredi jakost, žarišnu daljinu i oba radijusa zakrivljenosti leće.

1620. Od točno 10 kg leda napravljena je kugla. Ako kuglu uronimo u vodu gustoće 1000 kg/m^3, koliko iznad površine vode viri vrh kugle? Kolika je površina kugle iznad vode? Gustoća leda je 920 kg/m^3.

1621. Odredi prosječnu gustoću planeta ako je period rotacije 9 sati, a ubrzanje sile teže na polovima je 5% veće nego na ekvatoru. Zanemariti spljoštenost planeta.

1622. U kalorimetru se nalazi 0.8 kg leda, temperature 0 °C. Ulijemo toliko vode temperature 20 °C da se u ravnotežnom stanju sav led otopi, i dalje se ne zagrijava. Koliko smo vode ulili? Koliki je porast entropije do dostizanja ravnoteže? Gubitke topline zanemarujemo.

C) Rješenja iz matematike

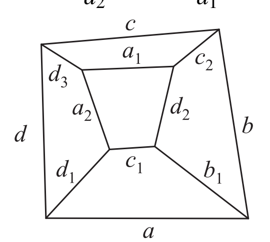
Ispravak

Drugo rješenje zadatka 3489 je netočno. U stvari je to trebalo biti rješenje drugog, sličnog zadatka kojeg navodimo s pripadnim rješenjem.

3489.* *Četverokut je podijeljen na pet manjih četverokuta tako da su u svakom od njih produkti duljina nasuprotnih stranica jednaki. Svaka stranica polaznog četverokuta je stranica po jednog manjeg, a peti je sadržan unutar polaznog. Dokaži da su produkti duljina nasuprotnih stranica polaznog četverokuta jednaki.*

Rješenje. Kako svaki manji četverokut ima to svojstvo, imamo: $ac_1 = b_1d_1$, $bd_2 = b_1c_2$, $ca_1 = c_2d_3$, $da_2 = d_1d_3$, $a_1c_1 = a_2d_2$. Odavde je

$$a = \frac{b_1d_1}{c_1},\ b = \frac{b_1c_2}{d_2},\ c = \frac{c_2d_3}{a_1},\ d = \frac{d_1d_3}{a_2}.$$



Sada je $ac = bd \iff$

$$\frac{b_1d_1}{c_1} \cdot \frac{c_2d_3}{a_1} = \frac{b_1c_2}{d_2} \cdot \frac{d_1d_3}{a_2},$$

a to je peta jednakost, tj. $a_1c_1 = a_2d_2$.

Ur.

3497. *Riješi sljedeći sustav jednadžbi:*

$$6x^2-xy-y^2+x+2y-1 = 0 \qquad (1)$$

$$12x^2-2xy-y^2-10x+12y-11 = 0. \qquad (2)$$

Rješenje.

$$\overset{(2)-2\cdot(1)}{\Longrightarrow} y^2+8y-9-12x=0$$

$$x=\frac{(y+9)(y-1)}{12}. \qquad (3)$$

(1) možemo zapisati kao

$$6x^2-x(y-1)-(y-1)^2=0,$$

pa uvrštavanjem (3):

$$\frac{(y+9)^2(y-1)^2}{24}-\frac{(y+9)(y-1)^2}{12}-(y-1)^2=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(y-1)^2}{24}\left[(y+9)^2-2(y+9)-24\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(y-1)^2}{24}(y+9-6)(y+9+4)=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(y-1)^2}{24}(y+3)(y+13)=0$$

$$\Longrightarrow y_1=1,\ y_2=-3,\ y_3=-13$$

$$\Longrightarrow x_1=0,\ x_2=-2,\ x_3=\frac{14}{3}$$

Dakle, sva rješenja sustava su:

$$(x,y)\in\left\{(0,1),(-2,-3),\left(\frac{14}{3},-13\right)\right\}.$$

Zlatko Petolas (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3498. *Nađi sva realna rješenja jednadžbe* $\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{z-2}+\sqrt{u}+\sqrt{v}=x+y+z+u+v$.

Rješenje. Očito mora vrijediti $x,y,u,v\geq 0$, $z\geq 2$. Grupiranjem

$$(x-\sqrt{x})+(y-\sqrt{y})+((z-2)-2\sqrt{z-2})$$
$$+(u-\sqrt{u})+(v-\sqrt{v})+2=0$$

i svođenjem na potpuni kvadrat

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2$$
$$+\left(\sqrt{u}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{v}-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$+2-4\cdot\frac{1}{4}-1=0$$

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2$$
$$+\left(\sqrt{u}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{v}-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

tj.

$$\sqrt{x}=\sqrt{y}=\sqrt{u}=\sqrt{v}=\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{z-2}=1 \Longrightarrow x=y=u=v=\frac{1}{4},\quad z=3.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3499. *Odredi sve parove cijelih brojeva* (a,b) *takve da je* $a+b$ *jedno rješenje kvadratne jednadžbe* $x^2+ax+b=0$.

Prvo rješenje. Ako je $x_1=a+b$ jedno rješenje kvadratne jednadžbe onda, iz Vièteovih formula, za drugo rješenje x_2 vrijedi:

$$(a+b)x_2=b$$

$$(a+b)+x_2=-a.$$

Dakle, $x_2=\dfrac{b}{a+b}=-2a-b$. Označimo $k=-2a-b$. Kako su $a,b\in\mathbf{Z}$ imamo $k\in\mathbf{Z}$. Iz $\dfrac{b}{a+b}=k \Longrightarrow b=\dfrac{ka}{1-k}$, što uvrštavanjem u $-2a-b=k$ slijedi $a=\dfrac{k(k-1)}{2-k}$ i onda $b=-\dfrac{k^2}{2-k}$. Uočimo

$$a=\frac{k(k-1)}{2-k}=\frac{(k-2)(k+1)}{2-k}+\frac{2}{2-k}$$
$$=-k-1+\frac{2}{2-k};$$

$$b=-\frac{k^2}{2-k}=-\frac{(k+2)(k-2)}{2-k}-\frac{4}{2-k}$$
$$=k+2-\frac{4}{2-k}.$$

Dakle, oba izraza $\dfrac{2}{2-k}$, $\dfrac{4}{2-k}$ moraju biti cijeli brojevi, a to je ako $\dfrac{2}{2-k}\in\mathbf{Z}$. Dakle

$$2-k\in\{\pm1,\pm2\}.$$

Konačno, $k\in\{0,1,3,4\}$ tj.

$$(a,b)\in\{(0,0),\ (0,-1),\ (-6,9),\ (-6,8)\}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Tražimo cijele brojeve a, b takve da je

$$(a+b)^2+a(a+b)+b=0.$$

Imamo kvadratnu jednadžbu

$$b^2+(3a+1)b+2a^2=0,$$

gdje je nepoznanica b cjelobrojna. Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je

$$D=(3a+1)^2-4\cdot 2a^2=(a+3)^2-8\geqslant 0.$$

Ona mora biti kvadrat cijelog broja. Ovaj izraz je za 8 manji od kvadrata cijelog broja $(a+3)^2$. Kako se razlika kvadrata cijelih brojeva povećava, lako je vidjeti da postoje samo dva kvadrata čija je razlika 8 tj. 9 i 1. Dakle,

$$(a+3)^2=9$$

odakle je $a=-6$ ili $a=0$. Za $a=-6$ je $b^2-17b+72=0$, tj. $b=9$, $b=8$. Za $a=0$ je $b^2+b=0$, tj. $b=0$, $b=-1$. Dobivamo četiri rješenja

$$(a,b)\in\{(-6,8),(-6,9),(0,0),(0,-1)\}.$$

Ur.

3500. *Ako su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$x^2+y^2+z^2=27$$

odredi minimalnu vrijednost izraza

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)^2\\
&=\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2(x^2+y^2+z^2)\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)\right]+54\\
&\geq\frac{1}{2}\left[2y^2+2x^2+2z^2\right]+54\\
&=27+54=81.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)^2\geq 81\quad\text{tj.}$$

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq 9.$$

Minimalna vrijednost 9 se postiže za $x=y=z=3$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3501. *Nađi sve proste brojeve oblika $2^{2^n}+5$ gdje je n nenegativan cijeli broj.*

Rješenje. Za $n=0$, $2^{2^n}+5=7$ što je prost broj. Pokazat ćemo da je to jedini nenegativan cijeli broj takav da je $2^{2^n}+5$ prost. Uočimo, za $n=1$, $2^{2^1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)$. Pretpostavimo $2^{2^n}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)$ za neki $n\in\mathbf{N}$. Tada je

$$2^{2^{n+1}}=2^{2^n}\cdot 2^{2^n}\equiv 2^{2^n}\,(\mathrm{mod}\ 3)\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3).$$

Sada je za svaki $n\in\mathbf{N}$, $2^{2^n}+5\equiv 1+2\,(\mathrm{mod}\ 3)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3)$ tj. $3|2^{2^n}+5$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3502. *U skupu kompleksnih brojeva riješi sustav jednadžbi:*

$$\begin{aligned}
u^{19}v^{25}&=1\\
u^5v^7&=1\\
u^4+v^4&=2.
\end{aligned}$$

Rješenje. Iz prve jednadžbe dobivamo

$$uv(u^6v^8)^3=1. \qquad (*)$$

Množenjem obje strane druge jednadžbe s uv:

$$u^6v^8=uv. \qquad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ imamo

$$(uv)^4=1\implies u^4=v^{-4}. \qquad (***)$$

Uvrštavanjem $(***)$ u treću jednadžbu:

$$v^{-4}+v^4=2\implies v^8-2v^4+1=0\implies$$

$$(v^4-1)^2=0\implies v^4=1\overset{(***)}{\implies}u^4=1.$$

Sada iz druge jednadžbe dobivamo:

$$1=u^5v^7=uu^4\frac{v^8}{v}=\frac{u}{v}\implies u=v.$$

Dakle, $u=v=\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$ tj.

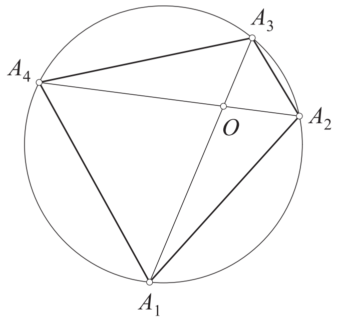
$$(u,v)\in\{(1,1),(i,i),(-1,-1),(-i,-i)\}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

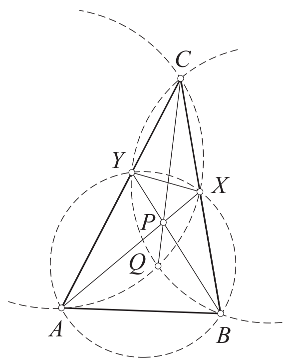
3503. *Točka P se nalazi unutar trokuta ABC. Točka X je sjecište pravca AP i stranice $\overline{BC}$, a Y je sjecište od BP i $\overline{AC}$. Dokaži da je četverokut $ABXY$ tetivan ako i samo ako se sjecište kružnica ACX i BCY (različito od C) nalazi na pravcu CP.*

Rješenje. Koristit ćemo poznatu tvrdnju: četverokut $A_1A_2A_3A_4$ na slici je tetivan ako i samo ako je

$$A_1O \cdot OA_3 = A_2O \cdot OA_4.$$



Neka se kružnice ACX i BCY, osim u C, sijeku u točki Q. Pretpostavimo prvo da su točke C, P, Q kolinearne.



Tada su četverokuti $AQXC$ i $BCYQ$ tetivni pa je

$$AP \cdot PX = QP \cdot PC = BP \cdot PY$$

tj. četverokut $ABXY$ je tetivni.

Obratno, neka je četverokut $ABXY$ tetivan. Tada je

$$AP \cdot PX = BP \cdot PY. \qquad (*)$$

Neka pravac CP siječe kružnice ACX i BCY u točkama K_1 i K_2 redom. Tada su točke C, P, K_1, K_2 kolinearne. Iz tetivnog četverokuta AK_1XC imamo

$$K_1P \cdot PC = AP \cdot PX, \qquad (**)$$

a iz tetivnog četverokuta $BCYK_2$

$$K_2P \cdot PC = BP \cdot PY, \qquad (***)$$

Sada $(*)$, $(**)$ i $(***)$ daju

$$K_1P \cdot PC = AP \cdot PX = BP \cdot PY = K_2P \cdot PC,$$

tj.

$$K_1P \cdot PC = K_2P \cdot PC \implies$$
$$K_1P = K_2P \implies K_1 = K_2 (= Q).$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3504. *Dan je konveksan četverokut $ABCD$ kod kojeg su kutovi $\sphericalangle ADC$ i $\sphericalangle BCD$ veći od 90°. Neka je E sjecište pravca AC i pravca kroz B paralelnog s AD i F sjecište pravca BD i pravca kroz A paralelnog s BC. Dokaži da je $EF \| CD$.*

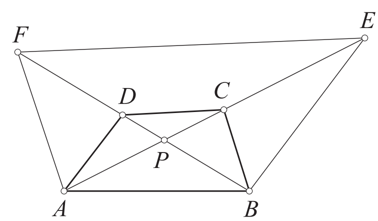
Rješenje.

$$\triangle PAD \sim \triangle PEB \implies \frac{|PD|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|PE|} \implies$$

$$|PE| = \frac{|PA||PB|}{|PD|} \qquad (*)$$

$$\triangle PBC \sim \triangle PFA \implies \frac{|PA|}{|PF|} = \frac{|PC|}{|PB|} \implies$$

$$|PF| = \frac{|PA||PB|}{|PC|} \qquad (**)$$



Dijeljenjem $(*)$ sa $(**)$ $\implies$

$$\frac{|PE|}{|PF|} = \frac{|PC|}{|PD|}.$$

Na osnovu S-K-S sličnosti, $\triangle PCD \sim \triangle PEF \implies EF \| CD$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

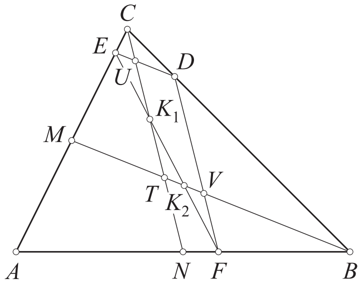
3505. *Neka su $\overline{BM}$ i $\overline{CN}$ težišnice trokuta ABC. Kroz bilo koju točku D na stranici $\overline{BC}$ povučene su paralele s pravcima BM i CN koje redom sijeku pravce AC i AB u točkama E i F. Dokaži da pravci BM i CN dijele dužinu $\overline{EF}$ na tri jednaka dijela.*

Prvo rješenje.

$\sphericalangle K_2FV = \sphericalangle K_2K_1T = \sphericalangle EK_1U$

$\sphericalangle K_2VF = \sphericalangle K_2TK_1 = \sphericalangle EUK_1 = \sphericalangle EDF \implies$

$\triangle K_2VF \sim \triangle K_2TK_1 \sim \triangle EUK_1 \sim \triangle EDF.$



Točka T je težište trokuta $\triangle ABC$ pa je $|NT| = \frac{1}{3}|NC|$, $|MT| = \frac{1}{3}|MB|$. S druge strane $\triangle FBD \sim \triangle NBC$, $\triangle CED \sim \triangle CMB$, pa je

$$\frac{|FV|}{|FD|} = \frac{|NT|}{|NC|} = \frac{1}{3}, \quad \frac{|EU|}{|ED|} = \frac{|MT|}{|MB|} = \frac{1}{3}.$$

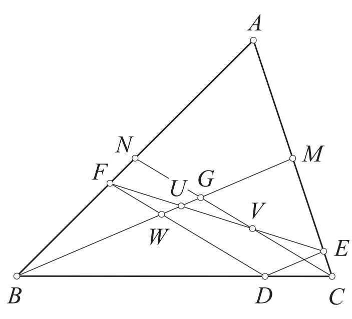
Dakle $\triangle K_2VF$ je sličan $\triangle EDF$ s koeficijentom sličnosti $\frac{1}{3}$ i $\triangle EUK_1$ je sličan $\triangle EDF$ s koeficijentom sličnosti $\frac{1}{3}$ tj.

$$|EK_1| = \frac{|EF|}{3} = |K_2F| \implies$$

$$|K_1K_2| = \frac{|EF|}{3} \implies \text{tvrdnja.}$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Točka $G = BM \cap CN$ je težište trokuta ABC.



Imamo

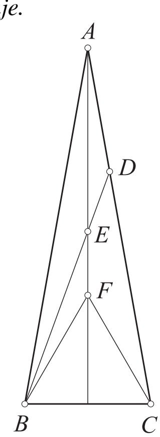
$$\frac{|FU|}{|FE|} = \frac{|FW|}{|FD|} = \frac{|NG|}{|NC|} = \frac{1}{3},$$

tj. $|FU| = \frac{1}{3}|FE|$. Slično je $|VE| = \frac{1}{3}|FE|$.

Ur.

3506. *U jednakokračnom trokutu ABC je $|AB| = |AC|$ i $\sphericalangle CAB = 20^\circ$. Na kraku $\overline{AC}$ dana je točka D za koju je $\sphericalangle ABD = 10^\circ$. Dokaži da je $|AD| = |BC|$.*

Prvo rješenje.



Neka je E točka presjeka $\overline{BD}$ i visine trokuta iz vrha A. Trokut ABE je jednakokračan jer $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABE = 10^\circ$ pa je $|BE| = |EA|$. Neka je F točka na visini trokuta iz vrha A tako da je $\sphericalangle EBF = 10^\circ$. Sada su trokuti EBF i EAD sukladni (stranica i priležeći kutevi) pa je $|AD| = |BF|$. S druge strane trokut BCF je jednakostraničan jer je $\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABF = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. Prema tome

$$|AD| = |BF| = |BC|.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

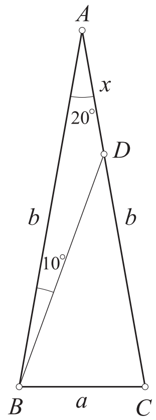
Drugo rješenje. Neka je $|AB| = |AC| = b$, $|BC| = a$ i $|AD| = x$. Koristeći kosinusov poučak, dobivamo iz $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos 20^\circ$$

$$a^2 = 2b^2(1 - \cos 20^\circ)$$

$$a^2 = 2b^2 \cdot 2\sin^2 10^\circ$$

$$a = 2b\sin 10^\circ. \qquad (1)$$



Koristeći poučak o sinusima, dobivamo iz $\triangle ABD$ (jer je $\sphericalangle ADB = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ$):

$$\frac{|AD|}{\sin 10^\circ} = \frac{|AB|}{\sin 150^\circ} \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{\sin 10^\circ} = \frac{b}{\frac{1}{2}}$$

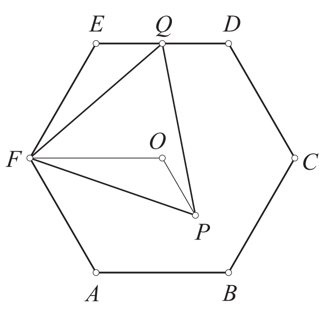
$$x = 2b \sin 10^\circ. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $x = a$, tj. $|AD| = |BC|$.

Sara Džebo (4), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

3507. *Točka O je središte pravilnog šesterokuta $ABCDEF$. Neka su P i Q polovišta dužina $\overline{OB}$ i $\overline{DE}$. Koliki je omjer površine trokuta PQF i površine danog šesterokuta.*

Prvo rješenje. Neka je a stranica šesterokuta tj. $|AB| = a$. Trokuti FQE i FPO su sukladni jer je $\sphericalangle POF = \sphericalangle QEF = 120^\circ$ i $|EQ| = |OP| = \frac{a}{2}$, $|EF| = |FO| = a$ (jednakost stranica i kuta koji zatvaraju).



Dakle, $|FQ| = |FP|$ tj. trokut FPQ je jednakokračan, a zbog $\sphericalangle EFQ = \sphericalangle OFP$ je $\sphericalangle QFP = 60^\circ$ tj. FPQ je jednakostraničan. Trokut FOQ je pravokutan pa je

$$|FQ|^2 = |FO|^2 + |OQ|^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}a^2.$$

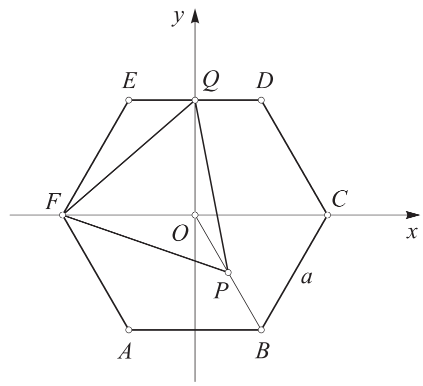
Omjer površine P_1 trokuta PQF i površine P_2 šesterokuta:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{|FQ|^2}{6a^2} = \frac{7}{24}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Stavimo šesterokut u Kartezijev koordinatni sustav kojemu je ishodište u točki O. Tada su koordinate vrhova P, Q, F trokuta (a je duljina stranice šesterokuta):

$$P\left(\frac{a}{4}, -\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \ Q\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \ F(-a, 0).$$



Ako je $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $F(x_3, y_3)$ površina trokuta PQF je

$$P_1 = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

tj.

$$P_1 = \frac{1}{2}\left|\frac{a}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - 0\right) + 0 \cdot \left(0 - \left(-\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)\right) + (-a) \cdot \left(-\frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \cdot 7.$$

Površina šesterokuta je

$$P_2 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Stoga je $\frac{P_1}{P_2} = \frac{7}{24}$.

Ur.

3508. *Riješi jednadžbu*

$$\left\lfloor \frac{25x-2}{4} \right\rfloor = \frac{13x+4}{3},$$

gdje je $\lfloor a \rfloor$ *najveći cijeli broj koji nije veći od* a.

Rješenje. Neka je $\dfrac{13x+4}{3} = y$, $y \in \mathbf{Z}$. Tada je

$$x = \frac{3y-4}{13},$$

pa je jednadžba ekvivalentna s

$$\left\lfloor \frac{\frac{25}{13}(3y-4)-2}{4} \right\rfloor = y,$$

tj.

$$\left\lfloor \frac{75y-126}{52} \right\rfloor = y.$$

Za svaki realan broj a vrijedi $a \leqslant \lfloor a \rfloor < a+1$, pa je

$$y \leqslant \frac{75y-126}{52} < y+1$$

tj.

$$126 \leqslant 23y < 178 \quad \text{i} \quad \frac{126}{23} \leqslant y < \frac{178}{23}.$$

Kako je $y \in \mathbf{Z}$ imamo $y = 6$ ili $y = 7$. Dakle,

$$x = \frac{14}{13} \quad \text{ili} \quad x = \frac{17}{13}.$$

Dženeta Sudžuka (2),
Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH

3509. *Ako je*

$$\sin x + \sin y = 2a$$
$$\cos x + \cos y = 2b$$
$$\cos(x-y) = -4ab,$$

dokaži $(a+b)^2 = \dfrac{1}{2}$.

Prvo rješenje.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$= \frac{(\sin x + \sin y)^2}{4} + \frac{(\cos x + \cos y)^2}{4} - \frac{\cos(x-y)}{2}$$
$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) + 2\cos(x-y)}{4}$$
$$- \frac{\cos(x-y)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Kvadriranjem prve dvije jednakosti i zbrajanjem dobivamo

$$\sin x \sin y + \cos x \cos y = \frac{4a^2+4b^2-2}{2},$$
$$\sin x \sin y + \cos x \cos y = \cos(x-y) = -4ab.$$

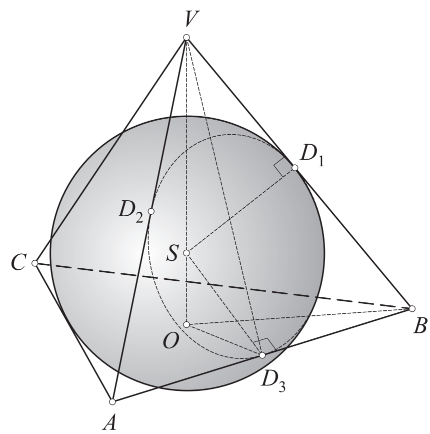
Iz $\dfrac{4a^2+4b^2-2}{2} = -4ab$, sređivanjem dobivamo tvrdnju zadatka.

Ur.

3510. *Duljina stranice baze pravilne trostrane piramide jednaka je* a, *a bočnog brida* $b \geq \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. *Koliki je polumjer kugle koja dodiruje sve bridove piramide?*

Rješenje. Neka tražena kugla, radijusa r, dodiruje prostorni trokut VAB u točkama D_1, D_2, D_3 kao na slici. Dakle,

$$|BD_1| = |BD_3| = \frac{a}{2}.$$



Iz sličnosti trokuta VSD_1 i VBO slijedi

$$\frac{|SD_1|}{|VD_1|} = \frac{|BO|}{|VO|}$$

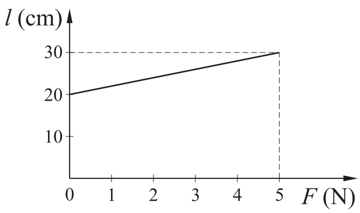
tj.

$$\frac{r}{b-\frac{a}{2}} = \frac{\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$
$$\Longrightarrow r = \frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 398. *Graf prikazuje ovisnost duljine opruge o sili koja djeluje na nju. Kolika će biti duljina te opruge kad na nju djeluje sila u suprotnom smjeru iznosa 2.2 N (njutna)?*



Rješenje.

$l_0 = 20$ cm

$F = 5$ N

$\Delta l = 30 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$

$\underline{F_1 = 2.2 \text{ N}}$

$l_1 = ?$

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{5 \text{ N}}{0.1 \text{ m}} = 50 \text{ N/m}$$

$$\Delta l_1 = \frac{F}{k} = \frac{2.2 \text{ N}}{50 \text{ N/m}} = 0.044 \text{ m} = 4.4 \text{ cm}$$

$$l_1 = l_0 - \Delta l_1 = 20 \text{ cm} - 4.4 \text{ cm} = 15.6 \text{ cm}.$$

Nives Ostojić (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 399. *Unutarnji otpor baterije je* 2 Ω *(oma). Kad ona nije spojena na trošilo, napon na njenim krajevima je 4.5 V (volta). Koliki će biti napon na krajevima žaruljice otpora* 20 Ω *kad ju spojimo na tu bateriju?*

Rješenje.

$R_B = 2\ \Omega$

$U = 4.5$ V

$\underline{R_Ž = 20\ \Omega}$

$U_Ž = ?$

$I_B = I_Ž$

$$\frac{U_B}{R_B} = \frac{U_Ž}{R_Ž}$$

$$U_B = \frac{U_Ž R_B}{R_Ž} = 2\ \Omega \cdot \frac{U_Ž}{20\ \Omega} = \frac{U_Ž}{10}$$

$$U = U_Ž + U_B = U_Ž + \frac{U_Ž}{10} = \frac{11 U_Ž}{10}$$

$$U_Ž = \frac{10U}{11} = \frac{10 \cdot 4.5 \text{ V}}{11} = 4.09 \text{ V}.$$

Maja Drmač (8), OŠ Malešnica, Zagreb

OŠ – 400. *Pernica ima oblik kvadra koji je dugačak 2 dm (decimetra) i širok 7 cm (centimetra). Njena je masa 100 g (grama). Tlak koji ona vrši na klupu iznosi 200 Pa (paskala). Izračunajte masu pribora u pernici.*

Rješenje.

$a = 2 \text{ dm} = 20 \text{ cm}$

$b = 7$ cm

$m_1 = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$

$\underline{p = 200 \text{ Pa}}$

$m_2 = ?$

$A = a \cdot b = 20 \cdot 7 = 140 \text{ cm}^2 = 0.014 \text{ m}^2.$

Tlak pernice s priborom na klupu je $p = \dfrac{G}{A}$ pa je težina pernice s priborom:

$$G = p \cdot A = 200 \text{ Pa} \cdot 0.014 \text{ m}^2 = 2.8 \text{ N}.$$

Masa pernice s priborom:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{2.8 \text{ N}}{10 \text{ N/kg}} = 0.28 \text{ kg} = 280 \text{ g}.$$

Masa pribora:

$$m_2 = m - m_1 = 280 \text{ g} - 100 \text{ g} = 180 \text{ g}.$$

Irena Antol (7), OŠ "Ljudevit Gaj", PŠ Donja Šemnica, Krapina

OŠ – 401. *Učenik ima jednu bakrenu zavojnicu i želi od druge bakrene žice, koju ima, napraviti još jednu istog otpora kao prva. Žica koju ima je dvostruko deblja od one na zavojnici. Ako na zavojnici ima namotano 5 m (metara) žice, koliko metara deblje žice mora uzeti da bi dobio zavojnicu istog otpora kao prva? Električni otpor je proporcionalan s duljinom žice i obrnuto proporcionalan s kvadratom promjera žice.*

Rješenje.

$r_2 = 2r_1$

$\underline{l_1 = 5 \text{ m}}$

$l_2 = ?$

$$R_1 = R_2$$
$$\frac{\rho \cdot l_1}{s_1} = \frac{\rho \cdot l_2}{s_2}$$
$$l_1 \cdot s_2 = l_2 \cdot s_1$$
$$l_1 \cdot r_2^2 \pi = l_2 \cdot r_1^2 \pi$$
$$l_1 \cdot (2r_1)^2 \pi = l_2 \cdot r_1^2 \pi$$
$$l_1 \cdot 4r_1^2 \pi = l_2 \cdot r_1^2 \pi$$
$$l_2 = 4l_1 = 20 \text{ m.}$$

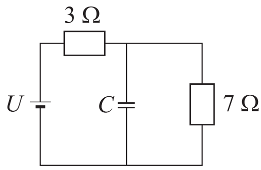
Maja Drmač (8), Zagreb

1602. *Laserska zraka se lomi i reflektira na površini mirne vode. Ako je kut između lomljene i reflektirane zrake* 100°*, a indeks loma vode 1.33, odredi upadni kut laserske zrake u odnosu na okomicu površine vode.*

Rješenje. Označimo s α traženi upadni kut, a s β kut loma. Kako je kut refleksije također α, vrijedi $\alpha + 100^\circ + \beta = 180^\circ$, dakle $\alpha + \beta = 80^\circ$. Zajedno sa Snellovim zakonom
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = 1.33$$
dobivamo
$$\frac{\sin(80^\circ - \beta)}{\sin\beta} = 1.33.$$
Korištenjem adicijske formule za sinus slijedi
$$\frac{\sin 80^\circ}{\operatorname{tg}\beta} - \cos 80^\circ = 1.33.$$
Odatle je $\beta = 33.2226^\circ$, pa je
$$\alpha = 46.7774^\circ = 46^\circ 46' 39''.$$

Ur.

1603. *Izvor napona u strujnom krugu na slici daje napon 24 V. Koliki je napon na kondenzatoru? Kolika je energija pohranjena u kondenzatoru ako mu kapacitet iznosi 200 nF?*



Rješenje. S obzirom da izvor daje istosmjerni napon, struja ne teče kroz kondenzator. Tada je struja kroz oba otpornika
$$I = \frac{U}{R} = \frac{24 \text{ V}}{3\Omega + 7\Omega} = 2.4 \text{ A}.$$
Napon na otporniku od 7 Ω je tada $U = IR = 16.8$ V, a to je ujedno i napon na kondenzatoru, jer su spojeni paralelno. Energija pohranjena u kondenzatoru određena je izrazom
$$E = \frac{1}{2} C U^2,$$
što uz $U = 16.8$ V i $C = 2 \cdot 10^{-7}$ F daje $E = 2.8224 \cdot 10^{-5}$ J.

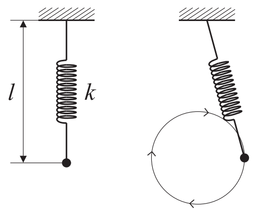
Ur.

1604. *Ioni litija dvaju stabilnih izotopa litija gibaju se u homogenom magnetskom polju iznosa 0.4 T. Ako jednostruko ionizirani lakši izotop* $^6Li^+$ *opisuje kružnicu radijusa 30 cm, koliku će kružnicu opisivati teži ion* $^7Li^+$ *jednake kinetičke energije? Kolika je ta energija u keV (kiloelektronvoltima) i kolike su njihove brzine?*

Rješenje. Kruženje nabijenih čestica u homogenom magnetskom polju određeno je izjednačavanjem magnetske i centripetalne sile:
$$qvB = m\frac{v^2}{r},$$
$$qBr = mv.$$
Uvrštavanjem podataka za ^{6}Li ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $B = 0.4$ T, $r = 0.3$ m, $m = 6u = 9.96 \cdot 10^{-27}$ kg) dobivamo
$$v(^6\text{Li}) = 1\,927\,711 \text{ m/s}.$$
Odgovarajuća kinetička energija je
$$E = \frac{mv^2}{2} = 1.8506 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 115.663 \text{ keV}.$$
Brzinu težeg izotopa litija dobivamo uvrštavanjem $m = 7u$ za masu:
$$v(^7\text{Li}) = 1\,784\,714 \text{ m/s},$$
što konačno daje za radijus kruženja
$$r(^7\text{Li}) = 0.324 \text{ m} = 32.4 \text{ cm}.$$

Ur.

1605. *Uteg mase 350 g obješen je na oprugu konstante elastičnosti* k*, tako da je od objesišta u ravnotežnom položaju udaljen* $l = 45$ *cm. Koliki je iznos konstante elastičnosti ako se uteg* *pri istovremenim malim oscilacijama (gore-dolje) i njihajima (lijevo-desno) može gibati po kružnici kao na slici?*



Rješenje. Gibanje po kružnici moguće je samo ako je period titranja jednak periodu njihanja:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$\frac{m}{k} = \frac{l}{g}.$$

Odatle je

$$k = \frac{mg}{l} = \frac{9.81 \cdot 0.35}{0.45} = 7.63 \text{ N/m}.$$

Ur.

1606. *Prvog dana proljeća Sunce se nalazi na nebeskom ekvatoru i tada izlazi točno na istoku, azimutu* 90°. *Ako se promatrač nalazi na* 45° *sjeverne zemljopisne širine, u kojem će smjeru Sunce izaći prvog dana ljeta? Tada se Sunce "popne" do* 23.5° *sjeverne širine.*

Rješenje. Označimo s α azimut izlaska Sunca prvog dana ljeta. U sfernim koordinatama (azimut, kutna visina) smjer izlaska Sunca je $(\alpha, 0)$, smjer sjevera je $(0,0)$, a smjer nebeskog sjevera je $(0, 45^\circ)$. Iz uvjeta da je kut između smjera izlaska Sunca i nebeskog sjevera jednak $\theta = 90^\circ - 23.5^\circ$ slijedi

$$\cos\alpha \cos 45^\circ = \cos\theta = \sin 23.5^\circ.$$

Odatle je traženi azimut

$$\alpha = 55^\circ 40' 22.5''.$$

Ur.

1607. *U periodu od osam godina planet Venera se u pet navrata opaža kao "zvijezda Večernjača" (i pet puta kao "zvijezda Danica"). Koliko orbita oko Sunca napravi Venera, a koliko Zemlja? Koristeći treći Keplerov zakon, odredi radijus Venerine putanje i prosječnu orbitalnu brzinu.*

Rješenje. U navedenom periodu Venera napravi pet orbita više od Zemlje, dakle Zemlja napravi 8 orbita, a Venera 13. Omjer velikih poluosi putanje izračuna se iz omjera ophodnih vremena:

$$\frac{a_V^3}{T_V^2} = \frac{a_Z^3}{T_Z^2},$$

uz $T_V = \frac{8}{13}$ godina $= 224.77$ dana $= 19\,420\,062$ s, a odatle je duljina velike poluosi

$$a_V = \left(\frac{8}{13}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot a_Z = 0.7235 a_Z$$

$$= 108\,163\,250 \text{ km}.$$

Brzina je odatle

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2a_V\pi}{T_V} = 35 \text{ km/s}.$$

Ur.

1608. *Idealnom crnom tijelu površine* $0.12\ m^2$ *snaga zračenja se poveća 12% ako mu temperaturu povisimo za 20 K. Kolika je početna i konačna temperatura? Kojom snagom tijelo zrači prije i poslije povećanja temperature?*

Rješenje. Snaga zračenja crnog tijela pri temperaturi T iznosi

$$P = \sigma S T^4,$$

gdje je S površina tijela, a $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W/ m^2 K^4 Stefan-Boltzmannova konstanta. Nakon povećanja temperature vrijedi

$$P' = 1.12P = \sigma S(T+20)^4.$$

Dijeljenjem dvaju izraza dobijemo

$$1.12 = \left(\frac{T+20}{T}\right)^4,$$

$$\sqrt[4]{1.12} = 1 + \frac{20}{T},$$

$$T = 695.96 \text{ K}.$$

Konačna temperatura je dakle 20 K veća, tj. $T' = 715.96$ K. Odgovarajuće snage zračenja iznose $P = 1596.24$ W i $P' = 1787.79$ W.

Ur.