Sudoku – napredne metode rješavanja (2.1)

Žarko Čulić[1]

U prošlom broju smo obradili grupu metoda pod nazivom *krila* (*Wings*), a u ovom nastavku ćemo se baviti metodama vezanim za jednoznačnost rješenja. Naime, sudoku je dobro postavljen ako ima samo jedno točno rješenje. Vezano za tu činjenicu, postoji šest različitih metoda koje ćemo obraditi u tri nastavka. Započet ćemo s *jednoznačnim pravokutnicima* (*Unique Rectangles*, ili u daljnjem tekstu skraćeno *UR*) koji se pojavljuju u šest različitih varijanti. Zbog obima tematike nećemo ulaziti u dublju analizu svake varijante, već ćemo ih samo opisati. Po definiciji *jednoznačni pravokutnik* čine četiri polja s istim parom kandidata (*UR* ili osnovni kandidati) smještenim u točno dva retka, dva stupca i dva kvadrata (slika 1). U tom slučaju imamo dva točna rješenja sudokua (slika 2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	7	5	8	3	9	4	2	6
B	6 8	3	6 8	2	7	4	9	1	5
C	4	2	9	6	5	1	3	7	8
D	6 8	1	6 8	3	9	5	7	4	2
E	5	4	7	1	6	2	8	3	9
F	2	9	3	4	8	7	6	5	1
G	7	5	4	9	2	6	1	8	3
H	9	8	1	5	4	3	2	6	7
I	3	6	2	7	1	8	5	9	4

Slika 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	7	5	8	3	9	4	2	6
B	6	3	8	2	7	4	9	1	5
C	4	2	9	6	5	1	3	7	8
D	8	1	6	3	9	5	7	4	2
E	5	4	7	1	6	2	8	3	9
F	2	9	3	4	8	7	6	5	1
G	7	5	4	9	2	6	1	8	3
H	9	8	1	5	4	3	2	6	7
I	3	6	2	7	1	8	5	9	4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	7	5	8	3	9	4	2	6
B	8	3	6	2	7	4	9	1	5
C	4	2	9	6	5	1	3	7	8
D	6	1	8	3	9	5	7	4	2
E	5	4	7	1	6	2	8	3	9
F	2	9	3	4	8	7	6	5	1
G	7	5	4	9	2	6	1	8	3
H	9	8	1	5	4	3	2	6	7
I	3	6	2	7	1	8	5	9	4

Slika 2.

I ne samo to. Budući da se danas gotovo svi sudokui generiraju i analiziraju računalnim programima, mreže na slici 2 također nisu ispravne, jer programi pri analizi odmah utvrde da postoje dva rješenja (u svako od ta četiri polja može ići i 6 i 8,

[1] Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: `zculic@math.hr`

odnosno ta *UR* polja imaju isti *otisak* (*footprint*) za ta dva broja) i proglase sudoku neispravnim, ili jave da ima više rješenja ili da nema (jednoznačnog) rješenja. Ova situacija se rješava tako da se u jedan od ta četiri polja *UR*-a upiše početni broj (*givens*) 6 ili 8 i tada preostala prazna polja više ne čine *UR*.

Da bi izbjegli dva rješenja, nužno je da u barem jednom polju *UR*-a bude jedan ili više dodatnih kandidata. Upravo je to prva varijanta metode *jednoznačnih pravokutnika*, *UR-tip 1*. Pogledajte sliku 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	9	7	8	4	6	5	3	2
B	4 6	4 6	8	2 3	5	2 3	7	1	9
C	3	5	2	9	1	7	6	4	8
D	8	3	1	7	6	9	4	2	5
E	5	2	4	1	3	8	9	7	6
F	6 7	6 7	9	5	2	4	1	8	3
G	2 7	8	6	4	7 9	2 3 5	2 3	5 9	1
H	2 4	1 4	3	6	8 9	1 2 5	2 8	5 9	7
I	9	1 7	5	2 3	7 8	1 2 3	2 3 8	6	4

Slika 3.

U polju s dodatnim kandidatima ne mogu biti točni osnovni kandidati jer bi za njih imali isti *otisak* (*footprint*) s dva moguća rješenja i stoga ih možemo eliminirati iz tog polja. U slučaju kao na slici 3, kada u *UR*-u postoji samo jedan dodatni kandidat, on ujedno predstavlja i rješenje dotičnog polja. Konkretno, u navedenom primjeru u kojem *UR* čine polja BI46, polje I6 = 1.

Druga varijanta ove metode *UR-tip 2* ima u dva susjedna *UR* polja jednog istog dodatnog kandidata (slika 4). Upravo taj dodatni kandidat mora biti rješenje u jednom od ta dva polja jer bi u protivnom imali isti *otisak* (*footprint*) s dva moguća rješenja sudokua. Ne znamo točno u kojem je polju dodatni kandidat rješenje, ali ga možemo eliminirati iz svih polja koja vide oba polja s dodatnim kandidatom.

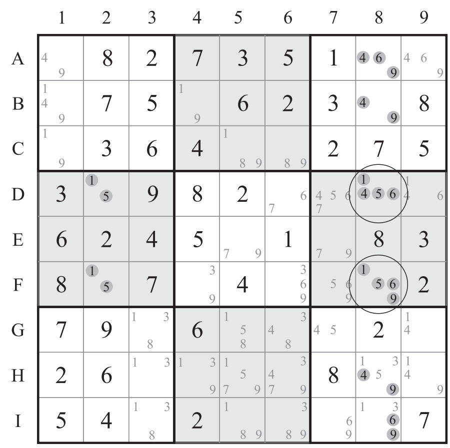
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	6	9	5	3 8	3 8	2	7	1
B	1	8	5	7	6	2	4	3	9
C	7	2	3	9	1 4	1 4	8	5	6
D	6	4	7	8	5	9	3	1	2
E	3	1	8	4	2	7	6	9	5
F	9	5	2	1 3	1 3	6	7	8	4
G	2 8	3 7	4	1 2 3	9	1 3 8	5	6	3 7 8
H	2 8	3 7	1	6	3 4 8	5	9	2 4	3 7 8
I	5	9	6	2 3	7	3 4 8	1	2 4	3 8

Slika 4.

Postoji proširenje (podvarijanta) ove metode gdje se jedan isti dodatni kandidat nalazi u tri polja *UR*-a i upravo on mora biti rješenje u jednom od njih. Stoga ga možemo eliminirati iz svih polja izvan *UR*-a koja vide sve dodatne kandidate u *UR* poljima.

U konkretnom primjeru na slici 4, *UR* čine polja GH29, osnovni kandidati su 3 i 7, a u poljima GH9 imamo dodatnog kandidata 8 kojeg možemo eliminirati iz kvadrata IX i stupca 9, odnosno polje I9<>8 (uobičajeno je da znak <> znači *različito*, budući da na standardnoj tastaturi ne postoji taj znak).

Treća varijanta *UR-tip 3* sastoji se od više dodatnih kandidata u dva susjedna polja (slika 5). Ti dodatni kandidati se u ovoj varijanti promatraju kao jedan zajednički podskup brojeva i traže se povezana polja izvan *UR*-a s kojima bi taj podskup mogao činiti *zaključani set*. Dakle, oba polja s dodatnim kandidatima tretiraju se kao jedno polje s tim kandidatima i ako uspijemo naći jedno ili više povezanih polja u retku, stupcu ili kvadratu s istim kandidatima da dobijemo *par*, *trojku*, *četvorku* ili *petorku*, tada možemo eliminirati te kandidate iz svih polja izvan *UR*-a koja vide sva polja *zaključanog seta*.

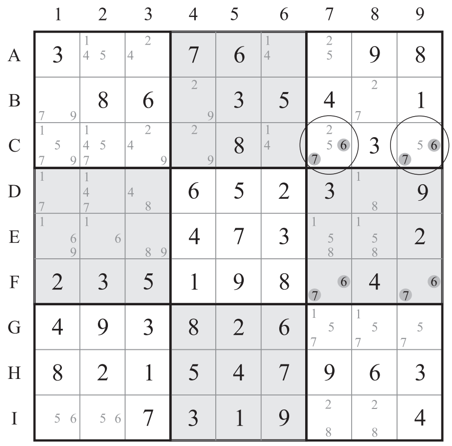


Slika 5.

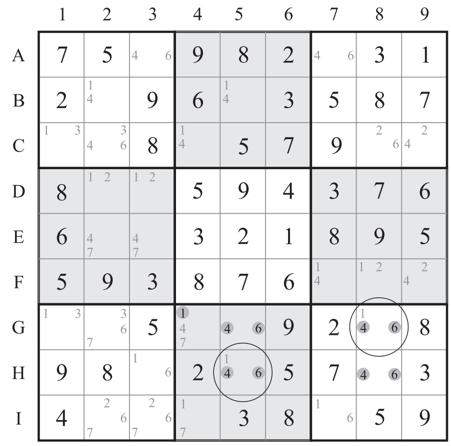
U konkretnom slučaju *UR* čine polja DF28, osnovni kandidati su 1 i 5. U polju D8 su dodatni kandidati 4 i 6, a u susjednom polju F8 6 i 9. Ti dodatni kandidati čine podset s brojevima $(4,6,9)$ i zajedno s povezanim poljima A8 $= (4,6,9)$ i B8 $= (4,9)$ čine *trojku* od brojeva 4, 6 i 9 (tri polja s kandidatima iz iste trojke brojeva). Stoga dotične brojeve možemo eliminirati iz svih polja koja vide sva polja koja čine tu trojku, odnosno polja HI8<> $(4,6,9)$.

Četvrta varijanta, *UR-tip 4* sastoji se od više dodatnih kandidata u dva susjedna polja, a pretražujemo samo osnovne kandidate u tim poljima (slika 6). Gledajući sva povezana polja, tražimo postoji li u poljima s dodatnim kandidatima neki od osnovnih kandidata samo u poljima *UR*-a. Ako je odgovor pozitivan, tada možemo eliminirati drugog osnovnog kandidata iz polja *UR*-a s dodatnim kandidatima.

U konkretnom slučaju *UR* čine polja CF79, osnovni kandidati su 6 i 7, u polju C7 imamo dodatne kandidate 2 i 5, a u polju C9 imamo dodatnog kandidata 5. Sada nas ne zanimaju ti dodatni kandidati, već pretražujemo osnovne kandidate u poljima s dodatnim kandidatima. Vidimo da osnovnog kandidata 7 imamo u povezanim područjima izvan *UR*-a u poljima C12, B8 i G79, dok osnovnog kandidata 6 nemamo nigdje izvan *UR*-a. Stoga broj 6 mora biti u jednom od polja s dodatnim kandidatima, dok broj 7 možemo eliminirati iz tih polja *UR*-a, konkretno C79<>7.



Slika 6.

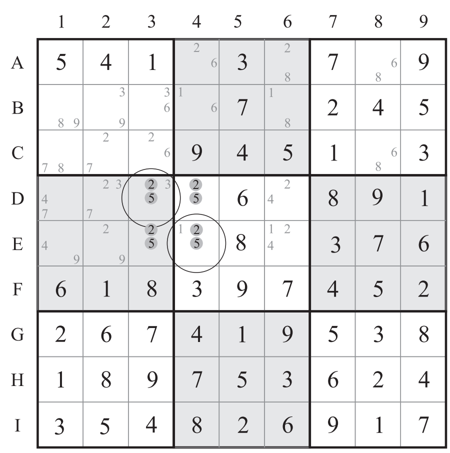


Slika 7.

Peta varijanta, *UR-tip 5* je identična varijanti *UR-tip 2* s tim da se jedan isti dodatni kandidat ne nalazi u dva susjedna polja, već u dva dijagonalna polja (slika 7). Da bi izbjegli dva rješenja sudokua zbog istog *otiska* (*footprinta*), dodatni kandidat mora biti točan u barem jednom od ta dva dijagonalna polja. Iako ne znamo točno u kojem polju taj dodatni kandidat predstavlja rješenje, možemo ga eliminirati iz svih polja koja vide oba polja *UR*-a s tim dodatnim kandidatom.

U primjeru na slici 7 *UR* čine polja GH58, a osnovni kandidati su 4 i 6. U poljima H5 i G8 dodatni kandidat je 1 i možemo ga eliminirati iz svih polja retka G u kvadratu VIII i retka H u kvadratu IX, konkretno G4<>1.

Posljednja varijanta, *UR-tip 6* je modificirana varijanta *UR-tip 4*, gdje se polja s dodatnim kandidatima nalaze u dijagonalnim, a ne susjednim poljima (slika 8). I ovdje se pretražuju samo osnovni kandidati u poljima *UR*-a s dodatnim kandidatima i tražimo je li koji osnovni kandidat prisutan jedino u poljima *UR*-a. U tom slučaju, možemo eliminirati tog osnovnog kandidata iz polja *UR*-a s dodatnim kandidatima. Dakle, ovdje za razliku od *UR-tip 4* eliminiramo osnovnog kandidata koji postoji samo u poljima *UR*-a, za razliku od *UR-tip 4* gdje eliminiramo drugog osnovnog kandidata iz polja *UR*-a s dodatnim kandidatima.



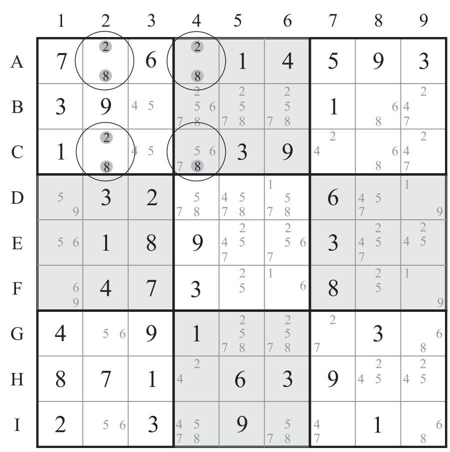
Slika 8.

U primjeru na slici 8 *UR* čine polja DE34 s osnovnim kandidatima 2 i 5. U polju D3 imamo dodatnog kandidata 3 i u dijagonalnom polju E4 dodatnog kandidata 1. Ne zanimaju nas u tim poljima dodatni kandidati, već gledamo samo osnovne kandidate i povezana područja te vidimo da broj 5 imamo jedino u poljima *UR*-a te ih tu možemo eliminirati. Zašto? Pretpostavimo da je broj 5 rješenje u jednom od tih polja s dodatnim kandidatima, npr. u polju E4. To povlači da u poljima E3 i D4 mora biti točan broj 2 (jedini preostali broj budući da su to polja samo s osnovnim kandidatima). Radi toga u polju D3 mora biti točan broj 5, jer se 5 po uvjetu nalazi samo u poljima *UR*-a. I na taj način smo dobili *UR* polja s istim *otiskom* (*footprintom*) za osnovne kandidate 2 i 5 dva moguća rješenja te stoga treba eliminirati broj 5 iz polja *UR*-a s dodatnim kandidatima.

Vidimo da se prve četiri varijante odnose na *UR* gdje su osnovni kandidati smješteni u susjedna polja, dok se preostale dvije varijante odnose na dijagonalni razmještaj tih polja. Nadalje, treba dobro paziti na samu definiciju *UR*-a, jer ako se polja ne nalaze točno u samo dva retka, dva stupca i dva kvadrata tada to nije *UR* i ne vrijedi niti jedna od navedenih varijanti. Znači da moramo imati dva polja u jednom kvadratu, a druga dva u drugom.

Kako nalazimo *UR*? Za prve četiri varijante treba krenuti od prvog retka i u njemu tražiti dva polja s istim parom kandidata. Ako ih nađemo u istom kvadratu, tada tražimo u vertikalnom bloku okomito ispod njih druga dva polja koja sadrže iste kandidate te eventualno i dodatne. Ako ih pak nađemo u različitim kvadratima, tada je dovoljno da druga dva polja tražimo samo u istom horizontalnom bloku okomito ispod njih. Potom treba napraviti analizu za varijante 1 do 4. Nakon toga pretražujemo drugi redak i tako redom do predzadnjeg. Potom treba prijeći na analogno pretraživanje od prvog do predzadnjeg stupca. Za varijante 5 i 6 pretraživanje opet pokrećemo od prvog retka, ali sada tražimo polje s parom kandidata i polje s istim parom te s jednim ili više dodatnih kandidata. Ako nađemo takvo polje, tada okomito ispod njega tražimo polje s parom osnovnih kandidata i gledamo postoji li polje s osnovnim i dodatnim kandidatima na sjecištu tog retka i stupca u kojem je početno polje. Postupak treba nastaviti na isti način dalje po redcima, pa potom po stupcima. Ovaj postupak se može obaviti i u jednom prolazu, ali treba paziti na sve mogućnosti.

Nismo ulazili u pojedinačnu analizu metoda, no dovoljno je krenuti od kandidata kojeg treba eliminirati i pretpostaviti da je točan. To dovodi do jednoznačnog određenja svih ostalih kandidata u *UR* poljima te se time dobiva isti *otisak* (*footprint*) za osnovne kandidate s dva moguća rješenja, što nije dopušteno.



Slika 9.

Na kraju dolazimo do najzanimljivije činjenice: postoji metoda *jednoznačnih pravokutnika s nepotpunim kandidatima* (*Unique Rectangles With Missing Candidates*) koja je potpuno identična opisanoj metodi *jednoznačnih pravokutnika* u svim njenim varijantama i koja pokazuje da nije nužno da sva *UR* polja imaju sve osnovne kandidate. Jedini je uvjet da niti jedan osnovni kandidat u *UR* poljima nije blokiran s početno upisanim brojevima. Pogledajte primjer na slici 9 koji je analogan varijanti *UR-tip 1* bez osnovnog kandidata 2 u polju C4.

U sljedećem nastavku ćemo pisati o ostalim metodama vezanim za jednoznačnost rješenja.

Zadaci za vježbu *jednoznačnih pravokutnika* s rješenjima:

Zadatak 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A						2			4
B			9			3	8	5	6
C	3			5				1	
D	4		6				1	9	
E									
F		9	3				7		8
G		1				7			5
H	9	3	5	4			6		
I	6			2					

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	6	1	8	9	2	3	7	4
B	7	2	9	1	4	3	8	5	6
C	3	4	8	5	7	6	2	1	9
D	4	5	6	7	3	8	1	9	2
E	8	7	2	9	1	4	5	6	3
F	1	9	3	6	2	5	7	4	8
G	2	1	4	3	6	7	9	8	5
H	9	3	5	4	8	1	6	2	7
I	6	8	7	2	5	9	4	3	1

Zadatak 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8			5					
B			7	3	9				
C			5			4	2		7
D		2			1	7	6		8
E			6				9		
F	4		1	9	8			2	
G	1		3	7			5		
H					5	8	4		
I						3			2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	1	4	5	7	2	3	6	9
B	2	6	7	3	9	1	8	5	4
C	3	9	5	8	6	4	2	1	7
D	5	2	9	4	1	7	6	3	8
E	7	8	6	2	3	5	9	4	1
F	4	3	1	9	8	6	7	2	5
G	1	4	3	7	2	9	5	8	6
H	6	7	2	1	5	8	4	9	3
I	9	5	8	6	4	3	1	7	2