

Optičke varke

Petar Žugec¹

Matematički ćemo modelirati tri optičke varke, sve vezane uz ovaj ili onaj oblik brzog gibanja. Prva, vezana uz stvaranje lažne slike pri promatranju vrtnje kotača, spremno je dostupna svakodnevnom iskustvu, te smo je svi zasigurno mnogo puta opazili. Druga varka stvara privid suženja ceste pri brzom gibanju, te je također dostupna izravnom iskustvu, no za njeno opažanje potrebna je razmjerno visoka brzina gibanja. Dok su ove dvije varke uzrokovane svojstvima sustava oko-mozak, posljednja je prirodna, matematički nužna posljedica konačnosti brzine širenja svjetlosti. Iako je malo vjerojatno da ćemo joj ikada moći posvjedočiti – jer da bismo je opazili, promatrač i predmet promatranja morali bi se jedan spram drugoga gibati relativističkim brzinama – ova varka vrlo je zanimljiv efekt, čije postojanje je lako predvidjeti. Pri tome ćemo vidjeti da je prisutna pri svim brzinama relativnog gibanja, jedino što je pri brzinama iz svakodnevnog života neopaziva zbog iznimne slabosti efekta. Međutim, to će se pokazati kao vrlo sretna okolnost jer bi suprotno značilo kraj pouzdanosti osjetila vida. U konačnici, svaki od ovih primjera uvjerit će nas da ono što vidimo nije nužno jednako onome što gledamo.

Vrtnja kotača

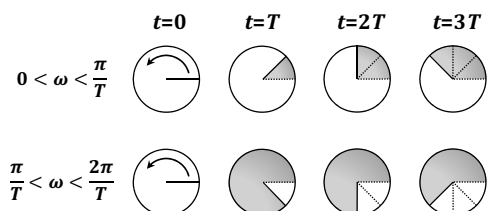
Napomena. U ovom dijelu oko ćemo smatrati optičkim uređajem poput kamere, koji periodički “okida” sličicu po sličicu. Ovo je svakako primjeren opis optičkih uređaja koji doista funkcioniraju po istom principu, tako da će model biti izravno primjenjiv na snimku kotača u vrtnji. Iako postoje razni pokušaji opisa oka ovakvim modelom [1], čini se da su u ispravan opis njegove funkcije ipak uključeni neki drugi, fiziološki složeniji procesi [2, 3]. No ovdje ćemo se ciljano zadržati na pojednostavnjenoj usporedbi s kamerom, s obzirom da se privid vrtnje kotača kakav ovaj model predviđa u dobroj mjeri slaže s onim što doista opažamo vlastitim očima. Ako ništa drugo, usvajanje ovakvog modela poslužiti će nam kao vježba za matematičku razradu problema te će nam omogućiti da istražimo posljedice i predviđanja, ako ne i ograničenja takvog pristupa. Više o problemu zainteresirani čitatelj može pronaći na internetu, pretragom pojma ‘wagon-wheel effect’.

Padne li nam pogled na kotač u vrtnji, s vremena na vrijeme učinit će nam se da se vrti unatrag, u smjeru suprotnom od stvarnog smjera vrtnje. Pretpostavit ćemo da je tome uzrok tromost oka, koje poput svakog optičkog uređaja ima konačnu vremensku razlučivost u procesu sabiranja slike. Ovdje ćemo, radi jednostavnosti, tromost oka modelirati periodičnošću okidanja kamere koja dinamički razvoj slike snima sličicu po sličicu.

Kako oko vidi kotač u vrtnji ovako modelirano? Za početak, promotrimo kotač samo s jednim krakom (slika 1). Kasnije ćemo rezultat trivijalno poopćiti na proizvoljan broj krakova. Neka se kotač vrti kutnom brzinom ω . Između dvaju okidanja oka krak kotača

¹ Autor je eksperimentalni fizičar s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: pzugec@phy.hr

prebrisat će kut $\theta = \omega T$. Ako je taj kut manji od jednog poluokreta ($\theta < \pi$; gornji red sa slike 1), oko će ga takvog vidjeti, a mozak – odnosno intuitivni dio uma – će ga ispravno interpretirati: kao zakret kotača za kut θ u smjeru njegove stvarne vrtnje. Ako je zakret između dvaju okidanja veći od jednog poluokreta ($\theta > \pi$; donji red sa slike 1), oko će opet ispravno vidjeti kutni pomak θ , no mozak će ga interpretirati prividnim kutnim pomakom Θ , i to unatrag, u smjeru suprotnom od vrtnje kotača. Lako je zaključiti da prividni kut Θ odgovara upravo kutu koji nedostaje do jednog punog okreta kotača: $\Theta = -(2\pi - \theta) = \omega T - 2\pi$. Negativni predznak smo ručno uveli kako bi prividni kutni pomak bio u suprotnom smjeru od stvarnoga.



Slika 1.

Što ako se kotač vrti toliko brzo da je kutni zakret između dvaju okidanja oka veći od punog okreta ($\theta > 2\pi$)? Ovaj put oko više ne može raspoznati pravi kut zakreta θ , već raspoznaje jedino kutni ostatak ϑ zaostao od posljednjeg punog okreta. Razumije se da ukupan broj N punih okreta možemo jednostavno izraziti kao: $N = \lfloor \theta/2\pi \rfloor = \lfloor \omega T/2\pi \rfloor$, gdje je $\lfloor \cdot \rfloor$ tzv. pod-funkcija (eng. *floor*), tj. funkcija najveće cijelo, odnosno, najveći cijeli broj koji nije veći od argumenta. Odavde za kutni ostatak izravno slijedi: $\vartheta = \theta - 2\pi N = \theta - 2\pi \lfloor \theta/2\pi \rfloor$. Sada se umna interpretacija slike ponovno upliće u priču te mozak, baš kao i prije, analizira upravo ono što su mu oči dostavile, a što je sada kutni ostatak ϑ . Prema tome, za $\vartheta < \pi$ prividni kut zakreta je $\Theta = \vartheta$, dok za $\vartheta > \pi$ ponovno vrijedi $\Theta = \vartheta - 2\pi$.

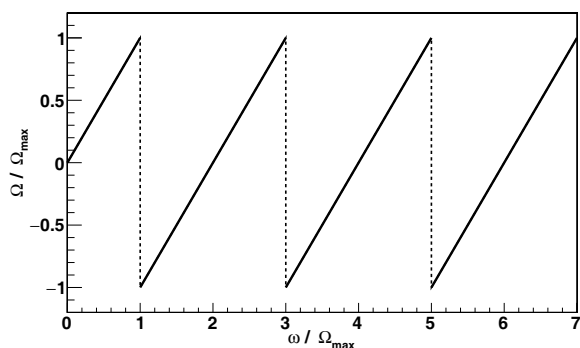
Jednom kad smo utvrdili da je prividni kut zakreta između dvaju okidanja oka rezultat ovakve međugre oka i mozga, lako je postaviti sljedeću tvrdnju – ekvivalentnu svim dosadašnjim razmatranjima – koja će nas dovesti do najkompaktnijeg zapisa konačnog rezultata: prividni kut Θ izravno je određen ukupnim brojem N punih okreta sadržanih unutar stvarnog prebrisano g kuta θ . Pri tome je jednak razlici između stvarnog zakreta i najbližeg cjelobrojnog višekratnika punog kuta! Drugim riječima, Θ ovisi o tome vrijedi li za ranije definiran kutni ostatak $\vartheta/2\pi < 0.5$ ili $\vartheta/2\pi > 0.5$, što nas prirodno navodi na funkciju $\text{round}(\cdot)$ zaokruživanja na najbliži cijeli broj:

$$\Theta = \theta - 2\pi \cdot \text{round}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) = \omega T - 2\pi \cdot \text{round}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad (1)$$

Sad je vrlo lako provesti poopćenje na kotač s proizvoljnim brojem k simetrično raspoređenih krakova. S obzirom da se u ovom slučaju ista slika kotača ponavlja nakon svakog zakreta za $2\pi/k$, u jednadžbi (1) dovoljno je provesti zamjenu $2\pi \rightarrow 2\pi/k$. Također, jednadžbu odmah dijelimo periodom T , kako bismo u jednom potezu odredili prividnu kutnu brzinu $\Omega = \Theta/T$, u ovisnosti o stvarnoj kutnoj brzini ω vrtnje kotača:

$$\Omega = \omega - \frac{2\pi}{kT} \cdot \text{round}\left(\frac{k\omega T}{2\pi}\right) \quad (2)$$

Očito je da se maksimum Ω_{\max} prividne brzine postiže onda kad je kutni ostatak ϑ jednak polovici kuta nakon kojeg se slika kotača ponavlja, odnosno $\vartheta = (2\pi/k)/2 = \pi/k$, što vodi na $\Omega_{\max} = \pi/kT$ (prema tome: $-\Omega_{\max} < \Omega < \Omega_{\max}$).



Slika 2.

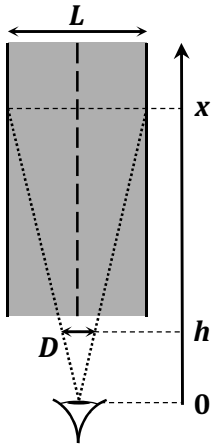
Slika 2 prikazuje oblik ovisnosti prividne brzine iz jednadžbe (2). Rješenje prikazuje vrlo zanimljivo svojstvo – pojavu diskontinuiteta! Prisjetimo li se uvodne napomene da je usvojeni opis tromosti oka zapravo egzaktni opis kamere, uz pristup internetu otvara nam se mogućnost izravne provjere je li predviđanje diskontinuiteta ispravno ili ne – sve što trebamo je pronaći snimku kotača u vrtnji, koju lako nalazimo pretragom pojma 'wagon-wheel effect' (npr. vidi [4] ili [5]). Variranjem brzine mogu se primijetiti dva kvalitativno različita prijelaza između vrtnje unaprijed i unatrag (koji odgovaraju prelasku prividne brzine Ω preko nule), sasvim u skladu s predviđanjem grafa sa slike 2. Jedan prijelaz je kontinuiran: postiže se kad je kutna brzina ω paran višekratnik od Ω_{\max} te odgovara prividnom uspoređenju vrtnje kotača do zaustavljanja, nakon čega slijedi nastavak vrtnje u suprotnom smjeru. Drugi prijelaz je diskontinuiran i postiže se kad je ω neparan višekratnik od Ω_{\max} . Jednostavnim promatranjem kotača doista je lako uvjeriti se da u tom slučaju prividna brzina vrtnje postiže svoj maksimum, zatim privid vrtnje nakratko postaje nejasan (diskontinuitet!), da bi se nastavio maksimalnom brzinom u suprotnom smjeru (nasuprot nastavku iz prividnog mirovanja). Vratimo li se opisu modela koji smo izgradili, primijetit ćemo da za pojavu diskontinuiteta nisu krive oči (ili svojstva snimke uhvaćene kamerom), već mozak! Naime, nagli preskok u prividnoj brzini odgovara trenutku kad kutni ostatak ϑ prelazi preko vrijednosti π/k , za kotač s k krakova. Tik prije prelaska ovog graničnog kuta mozak interpretira kutni pomak između dvaju okidanja oka kao maksimalni pomak unaprijed s obzirom na posljednji, već prebrisan puni okretaj. Tik nakon prelaska ove vrijednosti mozak kutni pomak "vidi" kao maksimalni pomak u suprotnom smjeru, i to s obzirom na sljedeći, još nedovršen puni okretaj.

Suženje ceste

Sljedeći problem vezan je uz prividno suženje ceste pri vožnji velikim brzinama. Njegovom objašnjenju ponovno ćemo pristupiti imajući tromost oka na umu². No ovaj put ključno svojstvo oka (ili sustava oko-mozak) neće biti periodičnost okidanja, već

² Zanimljivo je da specijalna teorija relativnosti predviđa efekt stvarnog suženja slike pred promatračem pri kretanju velikim brzinama, koji ne nastaje zbog svojstava optičkog instrumenta (poput oka ili kamere), već zbog promjene smjera širenja samih zraka svjetlosti. No da bi efekt došao i do kakvog značajnijeg izražaja, te brzine moraju biti relativističke, odnosno usporedive s brzinom svjetlosti. Stoga je sasvim jasno da tom relativističkom efektu nikako ne možemo pripisati odgovornost za ikakav privid suženja iz svakodnevnog iskustva.

konačna vremenska rezolucija u procesu sabiranja slike (što je, doista, stvarno svojstvo svakog optičkog instrumenta). Štoviše, periodičnost okidanja koju smo u prethodnom problemu artifičijelno pripisali oku ovaj put nam uopće nije potrebna! Umjesto toga, model tromosti oka zamijenit ćemo pretpostavkom da je slika koja se u konačnici razvija u mozgu “vizualni prosjek” svega što je viđeno tijekom vremenskog intervala T , nasuprot trenutnom stvaranju jedne oštre slike u svakom trenutku gledanja³ (primijetimo da se vremenski intervali T ne moraju nizati u diskretnim koracima, kao kod okidanja kamere, već da se radi o “kližućem”, odnosno kontinuiranom usrednjavanju).



Slika 3.

Iz anatomije oka poznato nam je da slika kakvu vidimo nastaje projekcijom svjetlosnih zraka na mrežnicu. Jednostavna geometrijska ilustracija sa slike 3 sugerira da bismo sliku potpuno istog oblika dobili da smo zrake svjetlosti “uhvatili”, odnosno projicirali na neki zamišljeni zastor izravno pred okom, na udaljenosti h (pa ih, po potrebi, dalje propustili do oka). Stoga slobodno možemo promatrati sliku nastalu na takvom zamišljenom zastoru, s obzirom da će oblikom biti (gotovo) jednaka slici nastaloj na mrežnici oka. Sama udaljenost h zamišljenog zastora posve je nebitna; potrebna je jedino kao pomoćni parametar za potpun opis geometrije stvaranja slike. Neka je na udaljenosti x od oka širina promatranog objekta (u ovom slučaju udaljenost rubova ceste) jednaka L . Širinu D projekcije istog objekta na zamišljeni zastor nalazimo vrlo jednostavno iz sličnosti trokuta:

$$D = \frac{Lh}{x} \quad (3)$$

te takva odgovara širini projekcije kakvu promatrač vidi u mirovanju. No što se događa s prividnom, usrednjenom projekcijom pri gibanju brzinom v ? Ovdje uključujemo pretpostavku da je ono što oko vidi nakon svakog intervala T svojevrstni “razmazani” prosjek svega viđenog tijekom istog intervala. Usredotočimo se na dio ceste koji se po završetku intervala nalazi na udaljenosti x od oka. Da sustav oko-mozak savršeno brzo obrađuje vizualne informacije, širina obrađene projekcije na mrežnicu bila bi proporcionalna trenutnoj širini D iz jednadžbe (3). Sada primijetimo: u slučaju da se cestom krećemo brzinom v , tijekom vremena T pomaknut ćemo se duž nje za udaljenost vT . A ako se tada promatrani presjek ceste stvarno nalazi na udaljenosti x , vizualni prosjek \bar{x} svega što se dogodilo tijekom T nalazit će se usred prebrisanog intervala vT , na $vT/2$! Drugim riječima, zbog vremenske zadržke potrebne za obradu vizualnih

³ Primijetimo da ovakvo proširenje modela gledanja ne mijenja temeljne rezultate iz prethodnog problema o prividu vrtnje kotača. Naime, “vizualni prosjek”, odnosno “vizualno usrednjenje” svega viđenog tijekom perioda T svakako dovodi do zamućenja slike pri dovoljno brznoj vrtnji kotača, što je savršeno poznata i lako provjerljiva činjenica iz svakodnevnog iskustva. No u tom slučaju se ništa fundamentalno ne mijenja u ranijem opisu stvaranja slike kotača – jedina novost je da se prividna kutna brzina Ω tada odnosi na glavni obris kraka nastao vizualnim usrednjenjem, koji se izdvaja nad ostatkom mutne pozadine stvorene gibanjem krakova. Štoviše, ovo samo pokazuje koliko je krajnje pojednostavnjen opis gledanja dovoljan za rekonstrukciju ovih fascinantnih vizualnih pojava.

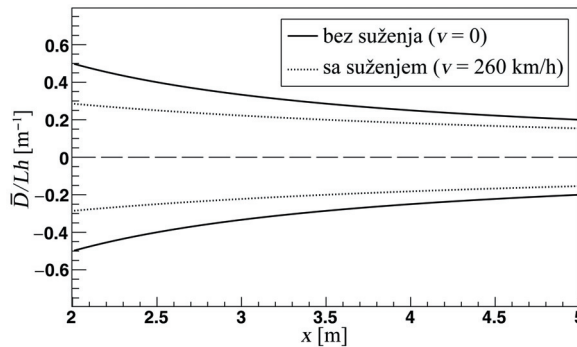
informacija, mozak “misli” da se presjek ceste nalazi na udaljenosti

$$\bar{x} = x + \frac{vT}{2} \quad (4)$$

a širina projekcije kakvu “vidi” je proporcionalna⁴:

$$\bar{D} = \frac{Lh}{\bar{x}} = \frac{Lh}{x + vT/2}. \quad (5)$$

Prema tome, mozak vidi cestu kao da je čitava pomaknuta unaprijed za $vT/2$, a udaljenije objekte uočavamo kao uže, čime smo objasnili privid suženja. Slika 4 prikazuje primjer prividnog suženja odabranog komada ceste pri brzini kretanja $v = 260$ km/h, uz $T = 1/24$ s (vrijednost koju proizvoljno izabiremo na temelju krajnje pojednostavnjene analogije s kamerom, s obzirom da nam je iz filmske umjetnosti poznato da su pri projiciranju filmova dovoljne 24 sličice u sekundi kako bi se oko uvjerilo u kontinuirani razvoj slike).



Slika 4.

Privid relativističkog objekta (Penrose-Terrellova rotacija)

Napomena. Vizualni efekt koji ćemo ovdje opisati, iako nije relativističke prirode sam po sebi, ide ruku pod ruku s relativističkim konceptima. Naime, jedino što je potrebno za njegovu pojavu je konačnost brzine svjetlosti, dok je za uključenje Einsteinove relativnosti potrebna puno jača tvrdnja: da, pored konačnosti, brzina svjetlosti u vakuumu mora biti jednaka u svim referentnim sustavima. No da bi efekt postao imalo zamjetan, potrebno

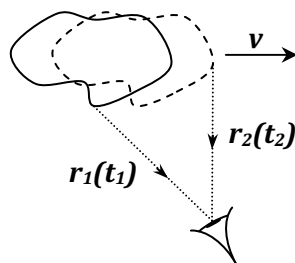
⁴ Strogo govoreći, mozak vidi prosječnu projekciju, umjesto projekcije koja odgovara prosječnom položaju ceste. Drugim riječima, unutar ovakvog jednostavnog modela \bar{D} odgovara prosjeku izraza (3), koji je proporcionalan srednjoj vrijednosti $1/\bar{x}$, a koja nije jednaka $1/\bar{x}$, kao što smo uzeli u jednadžbi (5): $\overline{1/x} \neq 1/\bar{x}$. Ispravan prosjek lako se može izračunati primjenom integralnog računa:

$$\bar{D} = Lh \cdot \overline{1/x} = \frac{Lh}{vT} \int_{x-vT}^x \frac{dx'}{x'} = \frac{Lh}{vT} \ln \left(\frac{x}{x-vT} \right). \quad (*)$$

No upravo zato što je potreban integralni račun, u glavnom tekstu smo se zadržali na pojednostavnjenoj argumentaciji iz jednadžbe (5). Naposljetku, sama tvrdnja da \bar{D} odgovara najjednostavnijoj definiciji prosjeka – što je ekvivalentno izboru faktora $1/2$ iz jednadžbe (4), odnosno nedostatku ikakve težinske funkcije u integralnoj definiciji prosjeka iz jednadžbe (*) – pojednostavnjenje je samo po sebi. Naime, ovdje nam nije od tolike važnosti izgraditi savršeno precizan model prividnog suženja ceste, već pokazati da i krajnje jednostavnim argumentima možemo objasniti pojavu ovog vizualnog fenomena.

je gibanje objekta promatrati brzinama bliskim svjetlosnoj, kad se u priču neizbježno upliću i stvarni relativistički efekti poput kontrakcije duljine. Stoga nije apsolutno nužno biti upoznat s konceptom kontrakcije duljine da bismo efekt predvidjeli i bili u stanju cijeniiti ga. No upravo zbog navedenog ćemo kontrakciju duljine na samome kraju uzeti u obzir, kako opis fizikalnog procesa ne bismo ostavili namjerno i obmanjujuće nepotpunim. Imajući to na umu, efekt se izravno veže uz pitanje je li relativističku kontrakciju uopće moguće izravno opaziti? Krajnji rezultat do kojeg ćemo doći, i koji će nam dati nedvoznačan odgovor na ovo pitanje, poznat je kao Penrose-Terrellova rotacija, iako ćemo vidjeti da bi primjereniji naziv bio Penrose-Terrellovo izobličenje.

Razmotrimo sljedeće: kako u oku nastaje slika protežnog predmeta (predmeta konačnih dimenzija), odnosno kako ona uopće dolazi do oka? Očito je da slika kakvu vidimo u danom trenutku stvaraju sve svjetlosne zrake koje u jednom (istom!) trenutku upadaju na mrežnicu oka. No brzina širenja svjetlosti je konačna, a u danome trenutku udaljenosti različitih točaka protežnog tijela od oka nisu jednake. Stoga zaključujemo da s različitih dijelova tijela zrake svjetlosti moraju biti emitirane u različitim trenucima kako bi sve u istu točku (na mrežnicu) dospjele u istom trenutku. No ako se pri



Slika 5.

tome predmet promatranja giba, različitim trenucima emisije odgovaraju i različiti položaji tijela! Ideja je ilustrirana slikom 5. Imajući je u vidu, ponavljamo srž opažanja: da bi zrake svjetlosti s dviju točaka tijela – koje su u danom trenutku na različitoj udaljenosti od oka – u oko dospjele u istom trenutku, moraju biti emitirane u različitim trenucima. Stoga je konačna slika predmeta u gibanju rezultat njegovih različitih položaja!

Promotrimo trenutak gledanja τ . Da bi s i -te točke tijela zraka svjetlosti došla u oko upravo u trenutku τ , mora biti emitirana u nekom ranijem trenutku t_i ($t_i < \tau$). Ako je $r_i(t)$ vremenska ovisnost udaljenosti i -te točke od oka, tada, uz brzinu svjetlosti c , mora biti

$$\tau = t_i + \frac{r_i(t_i)}{c}. \quad (6)$$

Dakle, trenutak gledanja nastupa nakon propagacije zrake za udaljenost $r_i(t_i)$, što je udaljenost i -te točke u trenutku emisije. Izraz (6) bit će polazna jednakost za sve daljnje račune, koje ćemo, radi jednostavnosti, primijeniti na gibanje dvodimenzionalnog objekta u ravnini. Tako ćemo prikazati kako izgledaju slike kruga i kvadrata koji se pravocrtno gibaju u ravnini u kojoj se nalazi i promatrač. Postupak koji ćemo razviti za dvodimenzionalni slučaj vrlo se lako poopćuje na gibanje trodimenzionalnih tijela u prostoru (najizravniji način je jednostavna zamjena 2D-koordinata cilindričnima). Prema tome, uz $x(t)$ i $y(t)$ kao vremensku ovisnost koordinata pojedinih točaka tijela, udaljenost $r_i(t_i)$ i -te točke tijela (od promatračeva oka) u trenutku t_i emisije svjetlosne zrake, po Pitagorinom je poučku jednaka:

$$r_i(t_i) = \sqrt{x_i^2(t_i) + y_i^2(t_i)}. \quad (7)$$

Opisat ćemo najjednostavniji oblik gibanja tijela: jednoliko gibanje po pravcu, brzinom v . U tom slučaju najprikladnije je usmjeriti x -os koordinatnog sustava u smjeru gibanja tijela, a promatrača smjestiti u ishodište. Ovakvim izborom vremensku ovisnost

koordinata možemo parametrizirati na vrlo jednostavan način:

$$\begin{aligned}x_i(t_i) &= X_i + vt_i \\ y_i(t_i) &= Y_i,\end{aligned}\tag{8}$$

gdje su X_i i Y_i koordinate početnog položaja i -te točke (u trenutku $t_i = 0$). Uvrštavanjem (7) i (8) u (6) dobivamo:

$$\tau = t_i + \frac{\sqrt{(X_i + vt_i)^2 + Y_i^2}}{c}.\tag{9}$$

Za dani trenutak gledanja τ potrebno je odrediti trenutak t_i emisije zrake s i -te točke jer je upravo njime određen položaj točke koji će oko vidjeti. Stoga prethodni izraz preuređujemo na način

$$\sqrt{(X_i + vt_i)^2 + Y_i^2} = c(\tau - t_i)\tag{10}$$

kako bismo kvadriranjem čitave jednakosti eliminirali korijen te dobili kvadratnu jednadžbu po t_i :

$$(c^2 - v^2)t_i^2 - 2(c^2\tau + vX_i)t_i + c^2\tau^2 - X_i^2 - Y_i^2 = 0.\tag{11}$$

Dva su rješenja ove jednadžbe, od kojih je prihvatljivo ono s negativnim predznakom pred korijenom⁵

$$t_i = \frac{c^2\tau + vX_i - \sqrt{c^2(X_i + v\tau)^2 + (c^2 - v^2)Y_i^2}}{c^2 - v^2}.\tag{12}$$

Rješenje (12) ćemo primijeniti na predmet oblika kruga koji se relativističkom brzinom giba prema promatraču. Neka se – u skladu s pretpostavkama iz jednadžbe (8) – središte kruga giba po pravcu paralelnom s x -osi, definiranom s $y = Y_0$. Točke s oboda kruga parametrizirat ćemo kutnim parametrom θ . Uz ovakav izbor, jednadžba kružnice čije središte miruje u ishodištu koordinatnog sustava vrlo se jednostavno parametrizira kao $X(\theta) = R \cos \theta$ i $Y(\theta) = R \sin \theta$, uz R kao radijus kružnice. Prednost ovakve parametrizacije je da se također vrlo lako poopćuje na slučaj kružnice čije je središte van ishodišta, te čak i na slučaj elipse, tj. kružnice koju smo istegnuli ili sabili u neke smjeru. Oba poopćenja bit će nam potrebna. Prvo uzimmo u obzir da se koordinate X_i i Y_i iz jednadžbe (12) odnose samo na početni položaj kruga te da smo indeks i zamijenili kontinuiranim parametrom θ : $X_i \rightarrow X(\theta)$ i $Y_i \rightarrow Y(\theta)$. Ako u početnom trenutku središte kruga postavimo u točku (X_0, Y_0) , tada parametrizaciju njegova oboda nadopunjujemo na način: $X(\theta) = X_0 + R \cos \theta$ te $Y(\theta) = Y_0 + R \sin \theta$. Sada je još potrebno uzeti u obzir da za objekt koji se giba brzinom v dolazi do stvarne kontrakcije duljine u smjeru gibanja⁶, i to za faktor $1/\gamma$, gdje je γ relativistički Lorentzov faktor

⁵ Koje od rješenja je prihvatljivo lako se može provjeriti numerički, za određeni izbor vrijednosti parametara X_i , Y_i i v . Isto tako, ako je izbor parametara posebno prikladan, poput $(X_i, Y_i) = (0, 0)$, tada nam sam analitički oblik dvaju rješenja može dati naslutiti ne samo koje je rješenje prihvatljivo, već i ima li drugo rješenje kakvu fizikalnu interpretaciju. Ovaj izazov ostavljamo zainteresiranom čitatelju. Bez ulaženja u diskusiju, recimo samo da za rješenje s negativnim predznakom pred korijenom vrijedi $t_i \leq \tau$, dok za ono s pozitivnim predznakom $t_i \geq \tau$. Kako zbog kauzalnosti trenutak gledanja (τ) mora nastupiti nakon trenutka emisije svjetlosne zrake (t_i), rješenje s negativnim predznakom ostaje kao jedino prihvatljivo.

⁶ Kako za danog promatrača brzina gibanja objekta ovisi o brzini gibanja samog promatrača, kontrakcija duljine doista će biti različita za različite promatrače, odnosno promatrače različitih brzina. Stoga je brzina v koja se pojavljuje u jednadžbi (13) uvijek *relativna* brzina njihova gibanja.

definiran kao

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (13)$$

Prema tome, radijus kruga u smjeru x -osi relativistički se skraćuje na način: $R \rightarrow \frac{1}{\gamma}R$, te konačna parametrizacija početnog položaja oboda kruga (koji se giba brzinom v) poprima oblik:

$$\begin{aligned} X(\theta) &= X_0 + \frac{1}{\gamma}R \cos \theta \\ Y(\theta) &= Y_0 + R \sin \theta \end{aligned} \quad (14)$$

što je potrebno uvrstiti u jednadžbu (12) na mjesto X_i i Y_i . Jednom kad smo primjenom jednadžbe (12) izračunali trenutke $t(\theta; \tau)$ u kojima su zrake svjetlosti morale biti emitirane s pojedinih točaka kruga kako bi sve u oko pristigle u danom trenutku τ , još samo treba iste točke propagirati u vremenu brzinom v – i to upravo za vremenski iznos $t(\theta; \tau)$ – kako bismo rekonstruirali koordinate pojedinih točaka u pripadnim trenucima emisije:

$$\begin{aligned} x(\theta; \tau) &= X(\theta) + v \cdot t(\theta; \tau) \\ y(\theta; \tau) &= Y(\theta). \end{aligned} \quad (15)$$

Upravo ovim dvjema jednadžbama određen je oblik oboda kruga kakav oko vidi u trenutku τ .

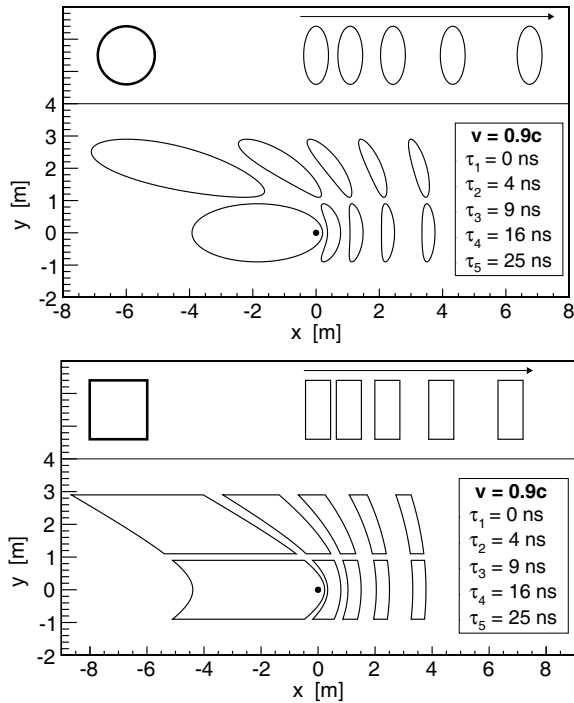
Prvi graf sa slike 6 prikazuje dva primjera, kod kojih smo postavili početni položaj središta kruga u točku $(X_0, Y_0) = (0, d)$, gdje je u jednom primjeru $d = 0$, a u drugom $d = 2$ m. (Dakle, u slučaju $d = 0$ krug prolazi položajem promatrača, koji je označen crnom točkom u ishodištu koordinatnog sustava. U drugom slučaju središte kruga prolazi pravcem koji je 2 m udaljen od promatrača.) Za radijus kruga smo izabrali $R = 0.9$ m. Podebljana kružnica u gornjem lijevom kutu prikazuje obod kruga u mirovanju. Pravilne elipse prikazuju stvaran položaj i stvaran oblik relativistički kontrahiranog kruga u pet izabranih (i na grafu naznačenih) *trenutaka promatranja*. Za brzinu gibanja kruga spram promatrača izabrali smo vrijednost $v = 0.9c$, tj. 90% brzine svjetlosti. Svaka od deformiranih krivulja s donjeg dijela grafa parametrizirana je dvjema jednadžbama iz (15) te prikazuje kako zbog konačnosti širenja svjetlosti krug izgleda promatraču u izabranim trenucima promatranja. Očito, jedna petorka krivulja odnosi se na slučaj $d = 0$, a druga na $d = 2$ m. Radi preglednosti, eksplicitno ćemo raspisati njihovu parametrizaciju jednadžbama iz (15), nakon uvrštavanja $(X_0, Y_0) = (0, d)$:

$$\begin{aligned} x(\theta; \tau) &= \frac{1}{\gamma}R \cos \theta + v \cdot \frac{c^2 \tau + \frac{v}{\gamma}R \cos \theta - \sqrt{c^2 \left(\frac{1}{\gamma}R \cos \theta + v\tau\right)^2 + (c^2 - v^2)(d + R \sin \theta)^2}}{c^2 - v^2} \\ y(\theta; \tau) &= d + R \sin \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Donji graf sa slike 6 potpuno je analogan gornjemu, samo što umjesto kruga prikazuje kvadrat, stranice duljine 1.8 m. Iako je jednostavna, njegovu parametrizaciju nećemo raspisivati jer se svaka stranica mora parametrizirati zasebno.

Kao što primjećujemo, za predmete koji ne prolaze položajem promatrača prividno izobličene uvelike nalikuju na rotaciju. Odavde izvire i popularan naziv ovog efekta: Penrose-Terrellova rotacija. No potpuno je jasno da je sama rotacija daleko od primjerenog opisa prikazanih efekata. Također možemo odgovoriti i na pitanje iz uvodne napomene: može li se relativistička kontrakcija duljine izravno opaziti? Sada je sasvim jasno da je odgovor *ne, ne može* jer je kontrakcija potpuno zasjenjena sekundarnim vizualnim efektima. Pri tome je privid objekta koji se približava promatraču čak i

izdužen – umjesto stegnut – dok je privid objekta koji se udaljava dodatno stegnut, s obzirom na oblik koji predviđa sama Lorentzova kontrakcija.



Slika 6.

Literatura

- [1] D. PURVES, J. A. PAYDARFAR, T. J. ANDREWS, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **93**, 3693 (1996) [<http://dx.doi.org/10.1073%2Fpnas.93.8.3693>]
- [2] K. KLINE, A. O. HOLCOMBE, D. M. EAGLEMAN, Vision Res. **44**, 2653 (2004) [<http://dx.doi.org/10.1016/j.visres.2004.05.030>]
- [3] T. ANDREWS, D. PURVES, Trends Cogn. Sci. **9**, 261 (2005) [<http://dx.doi.org/10.1016/j.tics.2005.04.004>]
- [4] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ef/The_wagon-wheel_effect.ogv
- [5] <https://www.youtube.com/watch?v=VNftf5qLpiA>