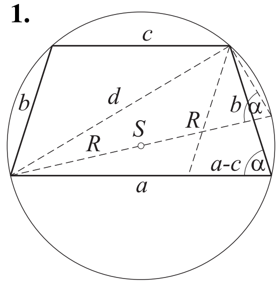
Primjena trigonometrije u planimetriji, stereometriji, fizici i geodeziji

Belma Alihodžić[1]

Često učenici, gimnazijalci postave pitanje: "Gdje se primjenjuje trigonometrija?". Odgovor na to pitanje bi vam mogli dati u narednih nekoliko primjera.

1.

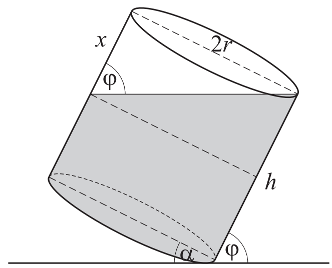


Jednakokračnom trapezu zadane su osnovice a i c, te krak b. Odredi polumjer trapezu opisane kružnice.

Rješenje. Ako je α kut uz osnovicu i d dijagonala, tada je $R = \dfrac{d}{2\sin\alpha}$. Kako je $\cos\alpha = \dfrac{a-c}{2b}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{2b}\sqrt{4b^2-(a-c)^2}$. Uzmemo li u obzir kosinusov poučak tj. $d^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha = b^2+ac$ dobijemo $R = \dfrac{b\sqrt{b^2+ac}}{\sqrt{4b^2-(a-c)^2}}$.

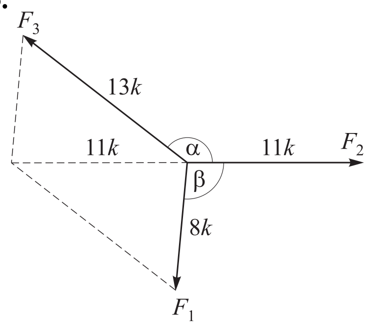
[1] Autorica je magistar matematičkih znanosti i profesorica matematike u Prvoj bošnjačkoj gimnaziji u Sarajevu; e-pošta: `balihodzic@gmail.com`

2. Stakleni valjak polumjera osnovice $r = 5$ i visine $h = 10$ napunjen je vodom. Za koliko treba nagnuti valjak da iz njega isteče $\frac{1}{4}$ vode?



Rješenje. Obujam valjka je $V = r^2\pi \cdot h = 25\pi \cdot 10 = 250\pi$. Istekla je četvrtina vode, dakle $V_1 = \frac{1}{4}V = \frac{125\pi}{2}$. Iz $r^2\pi \cdot x = 2V_1$, dobivamo $x = 5$. Sada je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2r}{x} = 2$, pa je $\varphi = 63°26'6''$, a traženi kut $\alpha = 90° - \varphi = 26°33'54''$.

3.



Na tijelo djeluju tri sile F_1, F_2 i F_3 koje se odnose kao $8 : 11 : 13$. Kolike kutove one međusobno zatvaraju ako su u ravnoteži?

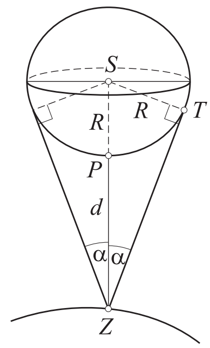
Rješenje. Iz danog omjera $F_1 : F_2 : F_3 = 8 : 11 : 13$ dobijemo $F_1 = 8k$, $F_2 = 11k$, $F_3 = 13k$, gdje je k koeficijent proporcionalnosti. Sa slike, iz kosinusovog poučka vrijedi

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{F_2^2 + F_3^2 - F_1^2}{2F_2F_3} = \frac{113}{143},$$

odakle slijedi $\alpha = 142°12'$.

Na sličan način dobijemo $\cos(180° - \beta) = \dfrac{F_1^2 + F_2^2 - F_3^2}{2F_1F_2} = \dfrac{1}{11}$, odnosno $\beta = 95°13'$.

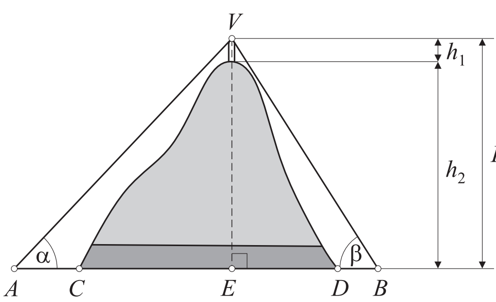
4. Planet je udaljen od Zemlje d km, a sa Zemlje se vidi pod kutom 2α. Kolika je njegova površina?



Rješenje. Kako je $\sin\alpha = \dfrac{R}{d+R}$ tj. $R = \dfrac{d\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$. Na osnovu relacije za površinu kugle $P = 4R^2\pi$ dobit ćemo

$$P = \frac{4d^2\pi\sin^2\alpha}{(1-\sin\alpha)^2}.$$

5. Kroz brdo visine $h_2 = 245$ m treba prokopati tunel. Na vrhu brda nalazi se toranj visine $h_1 = 18$ m. Tunel se kopa pravocrtno od točke C do D. Iz točaka A i B, gdje je $|AC| = 200$ m, $|BD| = 100$ m, vidi se vrh tornja pod kutovima $\alpha = 12°35'$ i $\beta = 17°13'$. Kolika je duljina tunela?



Rješenje. Vrh tornja je od podnožja udaljen za $H = h_1 + h_2 = 263$ m. Iz $\triangle EAV$ i $\triangle BEV$ imamo: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|VE|}{|AE|} = \dfrac{H}{|AE|}$ tj. $|AE| = \dfrac{H}{\operatorname{tg}\alpha} = 1178.2$ m i $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{H}{|BE|}$ tj. $|BE| = 848.74$ m. Duljina tunela je $|CD| = |AE| + |BE| - |AC| - |BD| = 1726.94$ m.