Svatko sa svakim – sparivanje Round Robinovog turnira

Siniša Režek[1]

Sažetak

Veliki derbi u Hrvatskoj nogometnoj ligi (HNL) Dinamo-Hajduk odigrat će se u 12 kolu. No, kako se točno zna u kojem se kolu koje momčadi susreću? Sigurno već znate da se nogometna liga igra po kružnom sustavu. Ovdje ću dati matematički uvod u sparivanje Round Robin turnira, ili turnira u kojem svaki natjecatelj igra protiv svakog drugog u nekom trenutku tokom turnira. Latinski kvadrati i osnovne teme u teoriji grafova uvedene su, kako bi se formirao koherentni sustav za matematičko predstavljanje Round Robina. Dva zajednička algoritma za sparivanje Round Robinovog, Kirkmanovog i Bergerovog algoritma, uvode se pomoću teorije grafova i implementacije koja je pojašnjena pomoću latinskog kvadrata – što je osnovni pristup.

Uvod

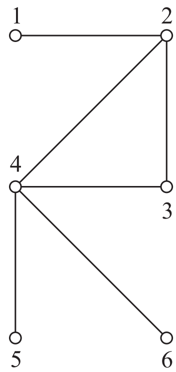
Round Robin često se koristi u natjecateljskim sportovima kao način rangiranja natjecatelja, a posebice u šahu i debatnim natjecanjima. Ako svaki natjecatelj ima priliku da se natječe protiv svakog drugog, tada za natjecatelja koji izbori optimalan sveukupni rezultat, možemo reći da je "najbolji" na tom turniru. Ručno sparivanje Round Robina može biti frustrirajuće. Pokušaja sparivanja kolo po kolo bez etabliranog algoritma, često rezultira nepopravljivim sukobima nakon nekoliko kola.

Postoje dvije vrste Round Robina. Jednokružni, u kojem svaki natjecatelj igra protiv svakog drugog jednom – jednostavno "svatko sa svakim" i dvorkužni, u kojem svaki natjecatelj igra protiv drugog i to protiv svakog dva puta. Dvokružni se obično koristi kada su bitne "strane", kao što su "crni" i "bijeli" u šahu ili "domaći" i "gosti" u većini sportova. Prednost korištenja dvokružnog Round Robina je da ispravlja potencijalne pristranosti koje se često pojavljuju. Naprimjer – kao "domaći" u sportskom događaju, obično jest prednost i to zbog navijačke baze i "domaćeg terena". Takva razmatranja odnose se samo na jednokružni Round Robin, a dvokružni se jednostavno nadograđuje nad jednokružni, udvostručavanjem jednokružnog sparivanja – sparivanje s nekim permutacijama – ako želite.

Matematička pozadina – teorija grafova i latinski kvadrati

Jedan od načina da definiramo bilo koji Round Robin jest kombinatona struktura, zvana graf. "Graf" u ovom kontekstu jest matematički izraz umjetnosti, i nema nikakve veze s nečim, poput crtanja grafova funkcija. Vizualno, graf je prikazan kao slijed točaka, povezanih linijama:

[1] Autor je profesor matematike i fizike u Gimnaziji u Koprivnici i međunarodni šahovski sudac; e-pošta: srezek@gmail.com



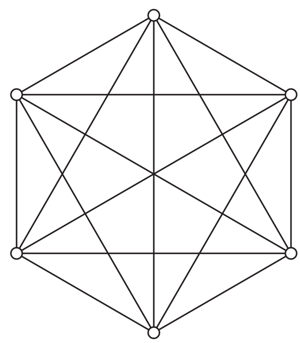
Formalno, graf je par skupova V i E sa sljedećim svojstvima: V je skup vrhova, a E je skup dvočlanih podskupova V, zvanih rubovi. Za povezivanje s vizualnom analogijom, vrhovima odgovaraju točkice, a rubovi odgovaraju linijama koje ih povezuju. Jedan od načina kako izraziti prethodni graf koristeći formalnu definiciju, bio bi:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

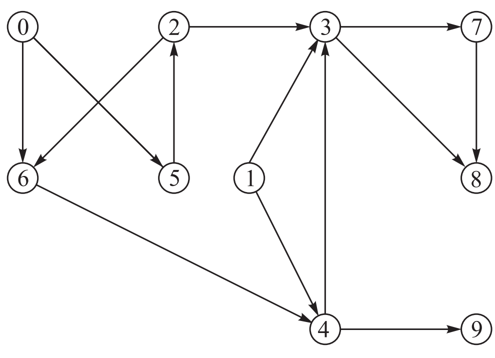
$$E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (4, 6)\}$$

Postoji širok raspon vrsta grafova, dijelova grafova, i terminologija povezanih s grafovima, što kumulativno čini temelj teorije grafova. Međutim, samo tri pojma iz teorije grafova su stvarno potrebna za razumijevanje osnova Round Robina:

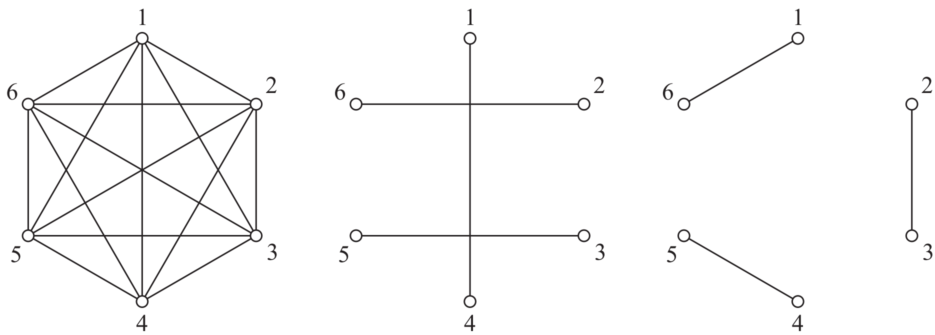
- *Potpuni graf*: graf u kojem se svakom vrhu pridružuje rub sa svakim drugim vrhom. Evo primjera potpunog grafa:



- *Usmjereni graf (digraf)*: jest graf u kojem rubovi imaju smjer (ili smjerove) povezane s njima. Grafovi u kojem rubovi nemaju pripadajuće smjerove nazivaju se neusmjereni. Evo primjera digrafa:



- *One-faktor*: jest zbirka takvih rubova u kojem ne postoje dva koji dijele zajednički vrh. To se također ponekad naziva perfect matching – savršeno podudaranje. Slijedi primjer dva različita *one-faktora*:



Graf može pružiti dobar način za predstavljanje parova i rezultata unutar turnira. Vrhovi predstavljaju natjecatelje na turniru (timovi, pojedinci, itd.), a rubovi predstavljaju sparivanja (igre, susreti i sl.) između dva povezana natjecatelja, pa se lako može modelirati jednokružni Round Robin s $2n$ natjecatelja (uključujući i potencijalno "bye" – koji je slobodni natjecatelj bez para) koristeći graf. One-faktor grafa od $2n$ vrhova predstavlja cijelo kolo unutar turnira – svaki natjecatelj je u paru protiv točno jednog drugog, niti jedan od njih nije sparen protiv bilo kojeg drugog. Ako je *one-faktor* za svako sljedeće kolo, stvoren pod uvjetom, da dani natjecatelj ne može biti sparen protiv natjecatelja protiv kojeg je prethodno bio sparen i zatim kombinirajući sve *one-faktor* rezultate, možemo dobiti potpun graf. Ovakav graf parova za svakog natjecatelja protiv svakog drugog može biti sparen točno jednom i time opisuje Round Robina. Graf se može također koristiti za zapisivanje rezultata kola do potpuno usmjerenog grafa svih kola, u kojem se svaki usmjereni rub kreće od pobjednika prema poraženom. Teorija grafova – uvod u bodovanje – može se naći u [1].

Još jedan matematički pristup, a prema opisu Round Robina motiviran je nastojanjem da se popis parova na turniru prikaže u obliku tablica. Svaki susret u svakom kolu može se prikazati kao trojka: $(e1, e2, r)$, gdje je $e1$ prvi natjecatelj, $e2$ drugi, a r je kolo u kojem se trebaju spariti $e1$ i $e2$. Ako smo dodijelili startne brojeve natjecateljima na turniru, dok su osi u tablici indeksirane natjecateljima na turniru i koji su na poziciji $(e1, e2)$, tako možemo izgraditi kompletan tabelarni popis parova u Round Robin turniru. Naprimjer, ovo vrijedi za Round Robin sparivanje 3 natjecatelja (uz pretpostavku da su sudionici uz dijagonalu tablice "bye"):

0	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

U 1. kolu, 1 je "bye", a 2 je sparen s 3. U 2. kolu, 2 je "bye", a 1 je sparen s 3. U 3. kolu, 3 je "bye", a 1 je sparen s 2. Imajte na umu, da ova tablica vrijedi za Round Robin sparivanja za 4 sudionika, ako pretpostavimo da su natjecatelji uz dijagonalu tablice "bye" i ako pretpostavimo da su dijagonalni parovi protiv četvrtog natjecatelja. Iako smo mogli izgraditi tablicu 4×4, lakše je izgraditi 3×3 tablicu i malo promijeniti smisao koji odražava tu činjenicu da Round Robin s parnim brojem natjecatelja nema "bye". Da zaključimo – većina Round Robin algoritma za sparivanje dizajnirani su za parni broj prijava, ali je lako generalizirati neparan broj natjecatelja dodjeljivanjem "bye" na jedan od natjecatelja. Broj kola, $2n - 1$, ostaje isti.

Primijenjen obrazac Round Robin sparivanja ima matematičko ime – rezultirajuće tablice su simetrični latinski kvadrati. Latinski kvadrat L_n reda n je $n \times n$ matrica s natjecateljima uzetih iz nekog određenog skupa N veličine n tako da je svaki element N događaj upravo jednom u svakom retku i stupcu od L_n. Alternativno, L_n može zastupati skup trojki (i, j, k) gdje je k natjecatelj L_n na poziciji (i, j). Podskup od latinskih kvadrata reda $2n-1$ koji opisuje valjane Roun Robin za turnire $2n$ i $2n-1$, i natjecatelj mora imati simetriju oko glavne dijagonale – jer lista natjecatelja u (a, b) i (b, a) opisuje isto kolo. Općenito, bilo koji simetrični latinski kvadrat može biti od koristiti za sparivanje Round Robin turnira.

Iako su mnogi algoritmi za sparivanje u Round Robinu izvedeni iz tumačenja Round Robina kao graf, provedba tih algoritama jest često najlakša prilikom tumačenja Round Robina kao latinskih kvadrata. To je zbog toga što su nizovi mnogo više prirodne strukture podataka od grafova koji postoje u većini programskih jezika. Osim toga, a zbog simetrije svojstava latinskih kvadrata proizvedenih od strane običnih Round Robin algoritama za sparivanje – parovi za određeno kolo mogu biti lako proizvedeni i bez izgradnje latinskog kvadrata, a što je atraktivni izgled za povećanje računalne učinkovitosti. Kao takvi, algoritmi ispod, bit će uveden preko pristupa teorije grafova koji se onda prevodi u latinski kvadrat – gdje se simetrija svojstva može koristiti za izradu učinkovitih algoritama.

Kirkmanov algoritam

Algoritam nazvan po pristupu koji je otkrio britanski matematičar Thomas Kirkman, 1847., jest klasični algoritam koji se koristi za sparivanje Round Robina. Prvo kolo na turniru (na primjeru osam natjecatelja, gdje osmi može ili ne mora biti "bye") se sparuje na sljedeći način:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{array}$$

Za prvo kolo, 1 je sparen s 8, 2 sa 7, 3 sa 6, a 4 s 5. U sljedećim kolima, jedan natjecatelj, obično posljednji po dogovoru, jest "fiksni", dok se drugi okreću u suprotnom smjeru. Kao takvo, drugo kolo spareno je kao:

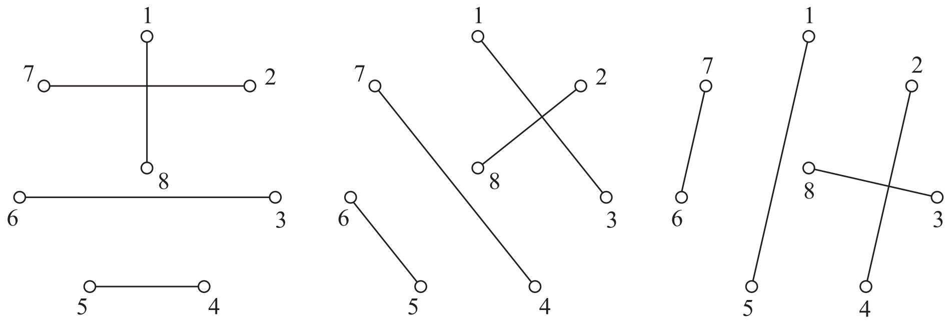
$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 6 \end{array}$$

dok će treće biti

$$\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 1 & 7 \end{array}$$

Naziv "round robin" proizlazi iz činjenice da se ovaj algoritam može koristiti i u praksi tako da će se natjecatelji raspoređeni u pravokutnoj tablici, nasuprot sve do jednog, okretati u tablici za svako sljedeće kolo.

Kao graf, prva tri kola od ove konstrukcije mogu biti predstavljena na sljedeći način:



S identificiranjem uzoraka u ovoj progresiji, očito je da s obzirom na početni *one-faktor*, naknadna kola mogu biti sparena okretanjem rubova grafa za jedno mjesto udesno, a imajući vrhove u prvobitnom položaju. Za Round Robina s 8 natjecatelja (ili njih 7 i "bye"), latinski kvadrat predstavlja kompletan turnir kako slijedi:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	5	2	6	3	7	4
2	5	2	6	3	7	4	1
3	2	6	3	7	4	1	5
4	6	3	7	4	1	5	2
5	3	7	4	1	5	2	6
6	7	4	1	5	2	6	3
7	4	1	5	2	6	3	7

Parovi za različita kola nalaze se kod antidijagonale iz latinskog kvadrata, tako da bi pronašli parove u svakom kolu i možemo početi s pozicijom kao u tablici (i,j) te nastaviti u bilo kojem antidijagonalnom smjeru. Ako zapamtimo našu indeksiranu poziciju prije svakog kretanja i "zaokrenuti" u tablici, a ako bismo se preselili s tablice, na kraju ćemo zapamtiti cijeli skup parova u tom kolu, kao i prijeđeni indeks. Da bi se izbjeglo zapisivanje dvostrukog kola, možemo koristiti simetriju i samo premjestiti nekoliko puta jednak broj kola. U našem slučaju, krećući se duž antidijagonale 4 puta dat će potpune parove za to kolo. Kao što je već spomenuto – ako je sparivanje imalo dva ista indeksa, to ukazuje na sparivanje protiv zadnjeg natjecatelja (što može biti "bye"). Sljedeći Python program implementira ovaj algoritam (bira kretanje duž antidijagonale nadesno):

```
def kirkman_pairing(n, rd):
    """
    Vraća parove za rd-to kolo za razigravanje s n igrača pomoću
    Kirkman algoritma.

    n ::: int, broj natjecatelja
    rd ::: int, broj kola
    returns pair ::: nested list of pairings
    """
    # 2n - 1 sparivanje isto kao 2n sparivanja
    if n % 2 != 0:
        n = n + 1
    idex = [rd, rd]
    pair = []
```

```
for i in xrange(n / 2):
   # Dodati posljednjeg (bye)
   if idex[0] == idex[1]:
      pair.append([idex[0], n])
else:
   pair.append(idex)

# Pomicanje prema gore u antidiagonali
idex = [idex[0] - 1, idex[1] + 1]

# Zaokrenuti, ako je potrebno
if idex[0] < 1:
   idex[0] = n - 1
if idex[1] > n - 1:
   idex[1] = 1

   return pair
```

Kao što je već spomenuto prije, ovaj algoritam, u stvari, ne konstruira graf niti latinski kvadrat; već dostatno iskorištava simetriju.

Kao posljednju primjedbu Kirkmanovom algoritmu, vidimo da se različiti parovi mogu izgraditi odabirom drugačijeg inicijalnog *one-faktora* i / ili permutacijom vrhova; sve što je bitno jest činjenica da početni *one-faktor* rotira jednom, dok su vrhovi fiksni, [5]. Međutim, napomenimo da takva generalizacija Kirkmanovog algoritma, najčešće nema stvarne praktične vrijednosti za stvaranje rasporeda na turniru.

Bergerov algoritam

Bergerov algoritam, nazvan po austrijskom majstoru Johanu Bergeru, koristi isti početni *one-faktor* kao Kirkmanov algoritam. Međutim, ovaj rotira *one-faktor* na $n/2 - 1$ poziciju u smjeru kazaljke na satu, s fiksnim vrhovima, za razliku od samog rotiranja jednog mjesta u smjeru kazaljke na satu. Bergerov algoritam se naširoko koristi na natjecanjima, u kojima su im dodijeljene određene "strane", a prije svega šahovski Round Robin, jer se one mogu dodijeliti parovima kako slijedi: a) natjecateljima su dodijeljeni jednaki brojevi kola na svakoj "strani" turnira, b) nijedan natjecatelj nije više od dva uzastopna kola dodijeljen istoj "strani", [5]. Latinski kvadrat predstavlja kompletne parove u turniru s Bergerovog algoritma za 8 natjecatelja:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7	1
3	3	4	5	6	7	1	2
4	4	5	6	7	1	2	3
5	5	6	7	1	2	3	4
6	6	7	1	2	3	4	5
7	7	1	2	3	4	5	6

Ovaj latinski kvadrat nazivamo Bergerovom tablicom. Kao što je s Kirkmanovim algoritmom, jasno je da su kola duž raznih antidiagonala od latinskog kvadrata. Zbog simetrije, možemo koristiti isti pristup kao u Kirkmanovom algoritmu, ali s različitim početnim položajem. U ovom algoritmu za 2n natjecatelja, natjecatelj i uvijek je u paru s natjecateljem $2n$ u kolu j, tako da smo mogli započeti na poziciji (i,i). U Bergerovom algoritmu, ta pravilnost je odsutna. No, redoslijed natjecatelja u prvom redu i stupcu Bergerove tablice je određen (i natjecatelj sljedećih redaka i stupaca – jednostavno je pomaknuta verzija u prethodnom retku ili stupcu). To znači da za kolo i, možemo početi na poziciji $(1,i)$ i primijeniti potpuno isti postupak kao obuhvaćenost u Kirkmanovom algoritamu i to za zapisivanje sparivanja za određeno kolo (a što zahtijeva kretanje u smjeru antidijagonale prema desno, kako bi se izbjeglo dupliciranje zbog simetrije. Sličnim argumentom, možemo početi na poziciji $(i,1)$ i krenuti u smjeru antidijagonale na lijevoj strani.

Slično Kirkmanovom, Bergerov algoritam možemo generalizirati odabirom drugačijeg inicijalnog faktora i/ili permutacijom vrhova. No, slično Kirkmanovom algoritmu, te generalizacije nisu praktički primjenjive.

Round Robin s dodatnim ograničenjima

Bergerov i Kirkmanov algoritam su učinkoviti za sparivanje osnovnog Round Robina jer koriste pravilnosti u određenim simetričnim latinskim kvadratima. Za Round Robina u kojem sve što je bitno je da se svaki natjecatelj sparuje protiv svakog drugog samo jednom i da su parovi grupirani u kolo; može se reći da su takvi pristupi idealni. Šahovski Round Robin, debatni Round Robin i većina sportskih igara može se spariti pomoću tih pristupa. Međutim, neki planovi zahtijevaju dodatna ograničenja, kao što su određeni parovi u određenim kolima. Ovo definira ograničeni Round Robin, a sparivanje za ovu vrstu turnira je puno teže. U osnovi problem postaje kombinatorno traženje problema koji se može naći u latinskim kvadratima ili potpuni graf odgovarajuće veličine koja ispunjava dodatna ograničenja. Algoritmi za rješavanje ovakvog problema su razvijeni (vidi [7], [8]), ali su izvan opsega ovog rada.

Primjeri

Najraširenija varijanta kružnog sustava, odnosno način određivanja parova je Bergerovov sustav. On se primjenjuje i u nogometu, upravo u prva dva kola HNL, rukometu, vaterpolu, šahu, Gou, a ponekad i u tenisu, završnici Masters serije.

Raširenost upotrebe je upravo u njegovoj jednostavnosti primjene. Nakon što su natjecateljski brojevi izvučeni, odmah su određeni parovi za sva kola. Primjenom jednostavne matematičke relacije moguće je za svakog natjecatelja ili momčad unaprijed odrediti s kojim se protivnikom ili momčadi sastaje u određenom kolu i hoće li biti domaća momčad, odnosno u šahu koju boju figura će imati. Pretpostavit ćemo da je broj učesnika paran, no relacije će se primjenjivati i za neparan broj natjecatelja, tj. s jednim natjecateljem manje. Kao što je poznato, za oba ova slučaja parovi su u svakom kolu jednaki, ako ne računamo par u kojem igra natjecatelj s posljednjim natjecateljskim brojem.

Prije svega treba zapamtiti određena pravila:

– ukoliko su oba natjecatelja s parnim ili oba s nepranim natjecateljskim brojem, igrač s većim brojem je domaćin ili igrač s bijelim figurama;

– ukoliko jedan natjecatelj ima parni, a drugi neparni natjecateljski broj tada je domaćin, odnosno bijele figure vodi igrač s manjim natjecateljskim brojem;
– ukoliko je na natjecanju paran broj natjecatelja tada je iznimka ovog pravila upravo posljednji, parni natjecatelj: protiv njega prva polovina natjecatelja je domaćin, odnosno ima bijele figure, a donja polovina natjecatelja je gost odnosno ima crne figure.

Zapamti, broj kola je za jedan manji od ukupnog broja natjecatelja ako je taj broj paran, odnosno jednak je broju natjecatelja ako je on neparan. Broj parova je jednak polovini broja natjecatelja.

Aritmetička metoda

Uz oznake, x i y za natjecateljske brojeve, N za broj igrača na natjecanju, te K za redni broj kola, pokušat ćemo na općenitim primjerima:

I. Odrediti protivnika natjecatelju za određenom kolu.

Moramo razlikovati dva slučaja.

a) Određivanje protivnika za natjecatelja s posljednjim izvučenim natjecateljskim brojem: $y = \dfrac{K+1}{2}$, ako je K neparan broj, odnosno $y = \dfrac{K+N}{2}$, ako je K paran broj,

Odredimo na primjeru protivnika.

Primjer 1. *Na natjecanju sa 16 natjecatelja odredi protivnika natjecatelju s posljednjim natjecateljskim brojem, dakle 16, u 10. kolu.*

Rješenje, za $K = 10$ i $N = 16$ slijedi,

$$y = \frac{10+16}{2} = 13.$$

Dakle, igra protiv natjecatelja s natjecateljskim brojem 13.

b) Određivanje protivnika za natjecatelja s bilo kojim drugim izvučenim natjecateljskim brojem: $y = K - x + N$, ako je $K - x < 0$, odnosno $y = K - x + 1$, ako je $K - x \geq 0$.

Odredimo na primjeru protivnika.

Primjer 2. *Odredi protivnika natjecatelju s natjecateljskim brojem 8 u 12. kolu na natjecanju sa 16 natjecatelja!*

Rješenje, za $K = 12$ i $x = 8$ slijedi,

$$K - x = 12 - 8 = 4.$$

Dakle, za $N = 16$ slijedi,

$$y = K - x + 1 = 12 - 8 + 1 = 5,$$

odakle proizlazi da igra protiv igrača s natjecateljskim brojem 5.

II. Odrediti broj kola u kojem se susreću dva natjecatelja.

I ovdje moramo razlikovati dva slučaja.

a) Određivanje protivnika za natjecatelja s posljednjim izvučenim natjecateljskim brojem:

$$K = 2 \cdot y - N, \text{ ako je } 2 \cdot y > N,$$
$$K = 2 \cdot y - 1, \text{ ako je } 2 \cdot y \leq N.$$

Odredimo na primjeru protivnika.

Primjer 3. Odredi redni broj kola u kojem se sastaju natjecatelji s natjecateljskim brojevima 16 i 5 na natjecanju sa 16 natjecatelja!

Za $N = 16$, $x = 16$ i $y = 5$ slijedi,

$$2 \cdot y = 2 \cdot 5 = 10$$

što je manje od 16, pa proizlazi,

$$K = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9.$$

Dakle natjecatelji se sastaju u 9. kolu!

b) Određivanje protivnika za natjecatelja s bilo kojim drugim izvučenim natjecateljskim brojem:

$$K = x + y - N, \text{ ako je } x + y > N,$$
$$K = x + y - 1, \text{ ako je } x + y \leq N.$$

Odredimo na primjeru protivnika.

Primjer 4. Odredi redni broj kola u kojem se sastaju natjecatelji s natjecateljskim brojevima 5 i 8 na natjecanju sa 16 natjecatelja!

Za $N = 16$, $x = 5$ i $y = 8$ slijedi,

$$x + y = 5 + 8 = 13$$

što je manje od 16, pa proizlazi

$$K = x + y - 1 = 5 + 8 - 1 = 12.$$

Dakle natjecatelji se sastaju u 12. kolu!

Pokušaj i ti odrediti parove i domaćinstva nekog od klubova u pojedinom kolu I. HNL, natjecateljske brojeve pronađi na Internetu ili u novinama.

Literatura

[1] Joseph Malkevitch, *Who Won!*, American Mathematical Society Feature Column, `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-scores`.

[2] Dalibor Froncek, *Scheduling a Tournament*, Chapter in Gallian, Joseph, ed. Mathematics and Sports, Mathematical Association of America, 2010.

[3] Siniša Režek, Maroje Portada, *Tajna Ratinga*, 2008.

[4] Siniša Režek, Maroje Portada, *Swiss Manager*, 2009.

[5] Mladen Bratošević, *Sudački priručnik*, 2002.

[6] Rasmus Rasmussen, Michael Trick, *Round Robin Scheduling – a Survey*, European Journal of Operational Research 188.3, 2008, 617–636.

[7] Michael Trick, *Integer and Constraint Programming Approaches for Round-Robin Tournament Scheduling*, Lecture Notes in Computer Science 2740, 2003, 63–77.