ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2016. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $1/265$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadaci iz matematike

3511. Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x+y+z+xyz=xy+yz+zx+2$.

3512. Odredi sve parove cijelih brojeva (x, y) takve da je

$$\sqrt{x\sqrt{5}}-\sqrt{y\sqrt{5}}=\sqrt{6\sqrt{5}-10}.$$

3513. Dokaži da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{bc}+\sqrt[4]{ca}\leq\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Kada vrijedi jednakost?

3514. Ako pozitivni realni brojevi a, b, c zadovoljavaju uvjet $a+b+c+2=abc$, dokaži nejednakost

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq 2.$$

Kada vrijedi jednakost?

3515. Riješi jednadžbu

$$i^{2016}x^2-(5-3i)x=12+(6-x^2)i.$$

3516. U trokutu ABC, D i E su polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, tim redom. Kružnica opisana trokutu CDE prolazi težištem trokuta ABC. Kolika je duljina težišnice $\overline{CK}$ trokuta ABC, ako je $|AB|=c$?

3517. Dokaži da je zbroj triju produkata od po dvije duljine: duljine visine šiljastokutnog trokuta i udaljenosti od ortocentra do vrha iz kojeg izlazi ta visina, jednak polovici zbroja kvadrata duljina stranica trokuta.

3518. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su redom točke M_n i N_n za koje je $|CM_n|=\frac{1}{n}|AC|$ i $|CN_n|=\frac{1}{n+1}|BC|$ za $n\geq 2$. Dokaži da svi pravci M_nN_n prolaze istom točkom. Koja je to točka?

3519. Dijagonala pravokutnika dijeli jedan njegov kut u omjeru $m:n$. Koliki je omjer opsega pravokutnika i duljine njegove dijagonale?

3520. Kružnica je opisana jednakokračnom trokutu ABC $(|AB|=|BC|)$. Na luku $\overset{\frown}{AB}$ dana je bilo koja točka K. Dokaži jednakost

$$|AK|\cdot|CK|=|AB|^2-|BK|^2.$$

3521. Dan je trokut ABC. Na pravcima BC, CA, AB su po dvije točke D, D'; E, E'; F, F' tako da je $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD'}$, $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE'}$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF'}$. Dokaži da se pravci kroz točke A, B, C, paralelnih redom s pravcima $E'F$, $F'D$, $D'E$, sijeku u istoj točki.

3522. Dan je trokut ABC. Točke A_1, A_2 spojene su kružnim lukom sa središtem A, točke A_2, B_1 spojene kružnim lukom sa središtem C, točke B_1, B_2 spojene kružnim lukom sa središtem B, točke B_2, C_1 spojene kružnim lukom sa središtem A, i točke C_1, C_2 spojene kružnim lukom sa središtem C.

1) Dokaži da se točke C_2, A_1 mogu spojiti kružnim lukom sa središtem B.

2) Dokaži da su sve točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 na kružnici. Gdje je njezino središte?

3523. Površina baze pravilne trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ jednaka je P. Točke D i E su redom polovišta bridova $\overline{BC}$ i $\overline{A_1B_1}$. Promatrajmo trokute čiji su vrhovi presjeci ravnina paralelnih s bazom prizme s dužinama $\overline{A_1B}$, $\overline{DE}$ i $\overline{AC_1}$. Odredi najmanju od površina tih trokuta.

3524. Odredi maksimalnu vrijednost funkcije $f(x)$ za $x>0$,

$$f(x)=\frac{\log x\cdot\log x^2+\log x^3+3}{\log^2 x+\log x^2+2}.$$

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 402. Istražujući gibanje tijela na kosini učenik je napravio kosinu dugačku 60 i visoku 20 centimetara. Izmjerio je da kvadar mase 300 grama može vući uz kosinu silom od 1.6 njutna. Koliku bi akceleraciju imao taj kvadar kad bi klizao niz kosinu?

OŠ – 403. Ivan i Petar se pripremaju za natjecanje u atletici i svaki dan trče na stazi dugoj 5 kilometara. Petar trči brzinom od 4 m/s i krenuo je 3 minute prije Ivana. Ivan dok trči u deset sekundi napravi 30 koraka duljine 1.6 metara. Koji će od njih prije doći na cilj? Kolika bi trebala biti duljina Ivanovog koraka da na cilj stignu istovremeno?

OŠ – 404. Dvije bakrene žice imaju istu masu, ali jedna je četiri puta dulja od druge. Koliko je puta otpor kraće žice manji od otpora dulje žice?

OŠ – 405. Učenik zna da se period jednostavnog matematičkog njihala može izračunati po formuli $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$ pri čemu je l duljina niti, a g ubrzanje sile teže. Želi napraviti tri njihala čiji se periodi odnose $1 : 2 : 3$, a zbroj duljina njihovih niti treba biti 1.5 metara. Kolike će biti duljine niti tih njihala?

1609. U trenutku prolaza kroz ravnotežni položaj, brzina njihala je 35 cm/s, a 0.2 sekunde kasnije brzina iznosi 22 cm/s u istom smjeru. Odredi period njihanja, duljinu njihala i kut maksimalnog otklona.

1610. Oko asteroida oblika kugle kruži satelit neposredno uz površinu. Odredi gustoću asteroida ako je ophodno vrijeme satelita 120 minuta.

1611. Radioaktivni izotop barija, $^{133}\mathrm{Ba}$ raspada se u stabilni $^{133}\mathrm{Cs}$. Nastala pobuđena jezgra cezija emitira gama zračenje sljedećih energija (u keV): 53.16, 79.61, 81.00, 160.61, 223.24, 276.40, 356.01, 383.85. Odredi energije četiri pobuđena stanja jezgre, ako znamo da emisijom najveće energije (383.85 keV) jezgra završi u osnovnom stanju (energije pobuđenja 0 keV).

1612. Unutar sante leda nalazi se granitni kamen. Santa pliva po površini mora, topi se u vodi i potone kada joj je ukupna masa (leda i kamena) 890 kg. Kolika je masa kamena? Gustoća leda je $920\ \mathrm{kg/m^3}$, kamena $2750\ \mathrm{kg/m^3}$, a morske vode $1030\ \mathrm{kg/m^3}$.

1613. Na gornjoj plohi aluminijske kocke duljine brida 6 cm izdubljena je polukugla maksimalnog radijusa (3 cm). Odredi masu kocke prije i nakon izdubljivanja. Odredi visinu težišta prije i nakon izdubljivanja. Gustoća aluminija je $2.7\ \mathrm{g/cm^3}$.

1614. Baterija za mobitel ima napon 3.7 V i kapacitet 1700 mAh. Ako bi napunjenu bateriju iskoristili za grijanje jedne litre vode, koliko bismo podigli temperaturu vode (uz idealnu iskoristivost i bez gubitaka topline)? Specifični toplinski kapacitet vode je $4190\ \mathrm{J/kgK}$.

1615. Tijelo se giba jednoliko ubrzano (kočenje) od $t = 0$ do zaustavljanja. U prvoj sekundi gibanja tijelo prevali 11.4 puta veći put nego u posljednjoj. Odredi početnu brzinu, ubrzanje i vrijeme zaustavljanja ako je zaustavni put 67.27 m.

C) Rješenja iz matematike

3483. *Za koje sve prirodne brojeve k je $2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k$ djeljivo sa 17.*

Prvo rješenje. Pokazat ćemo da to vrijedi za sve $k \in \mathbf{N}$. Neka je $k \in \mathbf{N}$ proizvoljan:

$$2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k = 8 \cdot 4^k + 9 \cdot 21^k$$
$$= 17 \cdot 4^k + 9 \cdot (21^k - 4^k).$$

Ostaje pokazati još da je $21^k - 4^k$ djeljivo sa 17 što slijedi iz

$$21^k - 4^k = 17(21^{k-1} + 21^{k-2} \cdot 4 + \cdots + 21 \cdot 4^{k-2} + 4^{k-1}).$$

Zlatko Petolas (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Drugo rješenje.

1° Neka je $k = 1$. Tada je
$$17 \mid 2^{2+3} + 3^{1+2} \cdot 7^1 = 13 \cdot 17.$$

2° Pretpostavimo da za neki $k \geqslant 1$
$$17 \mid 2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k.$$

3° Tada je
$$2^{2(k+1)+3} + 3^{k+1+2} \cdot 7^{k+1}$$
$$= 2^{2k+3} \cdot 2^2 + 3^{k+2} \cdot 3 \cdot 7^k \cdot 7$$
$$= 2^2(2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k) + 17 \cdot 3^{k+2} \cdot 7^k$$

što je djeljivo sa 17 jer je po pretpostavci $2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k$ djeljivo sa 17. Prema principu matematičke indukcije $2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k$ je djeljivo sa 17 za svaki $k \in \mathbf{N}$.

Amina Alihodžić (4),
Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

3484. *Nađi sva realna rješenja sustava jednadžbi:*

$$1+(y-z)^2=\frac{1}{x+5}$$
$$\sqrt{x+4}=y^4-2y^3-14y^2+6y+9.$$

Rješenje. Iz druge jednadžbe zaključujemo da mora biti $x+4\geq 0$ tj. $x\geq -4$. Za takve x je ispunjen ujedno i nužan uvjet u prvoj jednadžbi $x+5\neq 0$. Dalje, iz prve jednadžbe imamo

$$x+4=-\frac{(y-z)^2}{1+(y-z)^2}\leq 0$$

što znači $x+4=0$, tj. $x=-4$ i $y=z$.

Time druga jednadžba postaje $y^4-2y^3-14y+6y+9=0$. Djeljitelji slobodnog člana tog polinoma su ±1, ±3, ±9. Direktno se provjeri da su $y_1=1$ i $y_2=-3$ nul-točke tog polinoma. Iz

$$(y^4-2y^3-14y+6y+9):(y-1)(y+3)=y^2-4y-3$$

slijedi $y_3=2-\sqrt{7}$ i $y_4=2+\sqrt{7}$ su preostale dvije nutočke tog polinoma.

Dakle sva rješenja zadanog sustava jednadžbi su:

$$(x,y,z)\in\{(-4,1,1),(-4,-3,-3),$$
$$(-4,2-\sqrt{7},2-\sqrt{7}),(-4,2+\sqrt{7},2+\sqrt{7})\}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3485. *Za koje sve realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+3}+\sqrt{y^2-4\sqrt{3}y+16}$$
$$+\sqrt{z^2-8\sqrt{5}z+89}\leq 6.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}6&\geq\sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+3}+\sqrt{y^2-4\sqrt{3}y+16}\\&\quad+\sqrt{z^2-8\sqrt{5}z+89}\\&=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+1}+\sqrt{(y-2\sqrt{3})^2+4}\\&\quad+\sqrt{(z-4\sqrt{5})^2+9}\\&\geq\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9}=6.\end{aligned}$$

Dakle, $x=\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{3}$, $z=4\sqrt{5}$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3486. *Odredi sve cijele brojeve x za koje je izraz $x^2+3x+24$ potpuni kvadrat.*

Rješenje. Rješenja od $x^2+3x+24=k^2$, $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, su

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{4k^2-87}}{2}.$$

Ako je $x_{1,2}\in\mathbf{Z}$ prvo mora biti $4k^2-87=m^2$ za neko $m\in\mathbf{N}$. Dakle

$$(2k-m)(2k+m)=87.$$

Moguće faktorizacije od 87 su:

$$87=1\cdot 87=3\cdot 29.$$

1° $2k+m=87$, $2k-m=1$
$\Longrightarrow k=22, m=43\Longrightarrow x_1=20, x_2=-23.$

2° $2k+m=29$, $2k-m=3$
$\Longrightarrow k=8$, $m=13\Longrightarrow x_3=5$, $x_4=-8$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3487. *Za pozitivne brojeve a, b, c dokaži nejednakost*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Kada se postiže jednakost?

Rješenje. Označimo $S=a+b+c$, te definirajmo $f(x)=\left(\frac{x}{S-x}\right)^{\frac{2}{3}}$. Treba pokazati

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Pokazat ćemo da za $x\in\{a,b,c\}$ vrijedi

$$f(x)\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{x}{S}. \qquad (*)$$

$(*)$ vrijedi zbog sljedećeg niza ekvivalentnih nejednakosti:

$$\left(\frac{x}{S-x}\right)^{\frac{2}{3}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{x}{S}$$
$$\Longleftrightarrow\left(\frac{x}{S-x}\right)^2\geq\frac{27}{4}\frac{x^3}{S^3}$$

$$\iff S^3 \geq \frac{27}{4}x(S-x)^2$$

$$\iff \frac{(S-3x)^2(4S-3x)}{4} \geq 0$$

Sada je

$$f(a)+f(b)+f(c) \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{a+b+c}{S} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $S-3x=0$, za $x=a$, b, c; tj. za $a=b=c$.

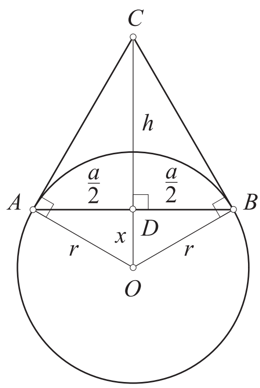
Zlatko Petolas (3), Zagreb

3488. *Dan je jednakokračan trokut ABC ($|AC|=|BC|$) s osnovicom duljine a i visinom duljine h. Dužina $\overline{AB}$ je tetiva kružnice koja dira krakove trokuta ABC. Odredi polumjer te kružnice pomoću a i h.*

Prvo rješenje. Neka je točka O središte kružnice, te $AB \cap OC = D$ i $|OD|=x$. Iz sličnosti trokuta AOD i CAD imamo

$$\frac{|AD|}{|OD|} = \frac{|CD|}{|AD|} \quad \text{tj.} \quad |AD|^2 = |OD| \cdot |CD|,$$

$$\frac{a^2}{4} = x \cdot h \quad \text{tj.} \quad x = \frac{a^2}{4h}.$$



Kako je $|OA|=|OB|=r$ iz Pitagorina teorema za trokut ADO dobijemo

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2,$$

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16h^2} = \frac{a^2(4h^2+a^2)}{16h^2}$$

tj.

$$r = \frac{a}{4h}\sqrt{a^2+4h^2}.$$

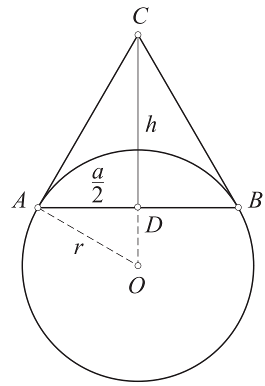
Sara Džebo (4),
Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Pravokutni trokuti ADC i OAC imaju zajednički kut $\sphericalangle ACD$:

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle ACO) = \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AO|}{|CA|}$$

tj.

$$\frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}} \implies r = \frac{a}{4h}\sqrt{a^2+4h^2}.$$

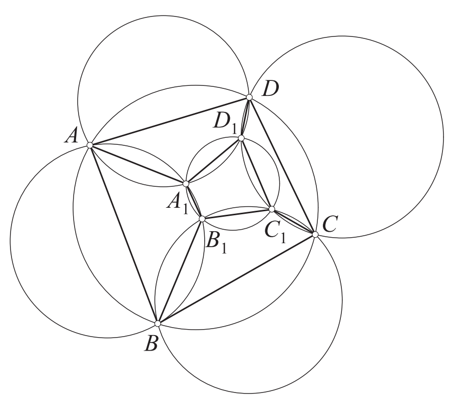


Zlatko Petolas (3), Zagreb

3489. *Četverokut je podijeljen na pet manjih tetivnih četverokuta. Svaka stranica polaznog četverokuta je stranica po jednog manjeg, a peti je sadržan unutar polaznog. Dokaži da je polazni četverokut također tetivni.*

Prvo rješenje. Dovoljno je pokazati

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \pi.$$

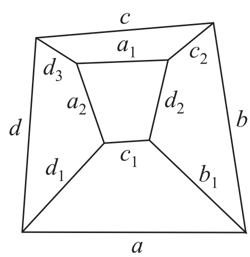


$$\begin{aligned}
\sphericalangle DAB &= \sphericalangle DAA_1 + \sphericalangle A_1AB \\
&= \pi - \sphericalangle A_1D_1D + \pi - \sphericalangle A_1B_1B \\
&= (2\pi - \sphericalangle A_1D_1D) - \sphericalangle A_1B_1B \\
&= \sphericalangle A_1D_1C_1 + \sphericalangle DD_1C_1 - \sphericalangle A_1B_1B \\
&= (\pi - \sphericalangle A_1B_1C_1) + (\pi - \sphericalangle C_1CD) - \sphericalangle A_1B_1B \\
&= (2\pi - \sphericalangle A_1B_1C_1 - \sphericalangle A_1B_1B) - \sphericalangle C_1CD \\
&= \sphericalangle BB_1C_1 - \sphericalangle C_1CD \\
&= \pi - \sphericalangle BCC_1 - \sphericalangle C_1CD \\
&= \pi - \sphericalangle BCD.
\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Kako je svaki manji četverokut tetivni, imamo: $ac_1 = b_1d_1$, $bd_2 = b_1c_2$, $ca_1 = c_2d_3$, $da_2 = d_1d_3$, $a_1c_1 = a_2d_2$. Odavde je

$$a = \frac{b_1d_1}{c_1},\ b = \frac{b_1c_2}{d_2},\ c = \frac{c_2d_3}{a_1},\ d = \frac{d_1d_3}{a_2}.$$



Sada je $ac = bd \iff$

$$\frac{b_1d_1}{c_1} \cdot \frac{c_2d_3}{a_1} = \frac{b_1c_2}{d_2} \cdot \frac{d_1d_3}{a_2},$$

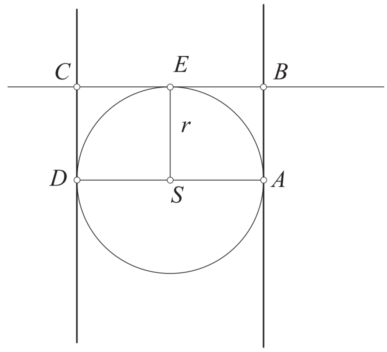
a to je peta jednakost.

Dakle, polazni četverokut je tetivni, tj. $a_1c_1 = a_2d_2$.

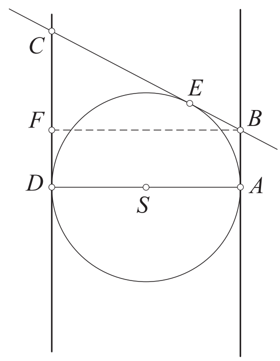
Ur.

3490. *Na kružnicu su povučene dvije paralelne tangente i one ju diraju u točkama A i D. Treća tangenta na tu kružnicu siječe ove dvije u točkama B i C. Ako je r polumjer kružnice, koliko je $|AB| \cdot |CD|$?*

Rješenje. Ako treća tangenta siječe okomito prve dvije, očito je $|AB| = |CD| = r$ i $|AB| \cdot |CD| = r^2$.



Ako treća tangenta ne siječe prve dvije okomito, pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, $|AB| < |CD|$, te neka je točka E diralište kružnice i treće tangente.



Zbog $|BE| = |AB|$, $|EC| = |CD|$ iz pravokutnog trokuta FBC slijedi

$$(|AB|+|CD|)^2 = |BC|^2 = (2r)^2 + (|AB|-|CD|)^2$$

tj. $|AB| \cdot |CD| = r^2$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

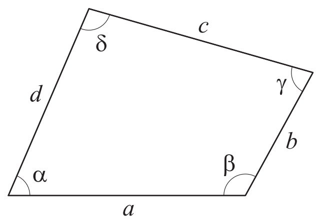
3491. *Odredi sve konveksne četverokute u kojima su zbrojevi sinusa nasuprotnih kutova međusobno jednaki.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha + \sin\gamma = \sin\beta + \sin\delta \\
&\iff 2\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\delta}{2}\right) \\
&\iff \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sin\left(180^\circ - \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\delta}{2}\right)$$

$$\iff \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta-\delta}{2}\right)\right] = 0$$



Kako je $\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) > 0$ jer $0 < \frac{\alpha+\gamma}{2} < \pi$, dakle

$$\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta-\delta}{2}\right) = 0$$

$$\iff -2\sin\left(\frac{\frac{\alpha-\gamma}{2}+\frac{\beta-\delta}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{\alpha-\gamma}{2}-\frac{\beta-\delta}{2}}{2}\right) = 0.$$

Odavde imamo dvije mogućnosti.

$$1^\circ \quad \sin\left(\frac{\frac{\alpha-\gamma}{2}+\frac{\beta-\delta}{2}}{2}\right) = 0.$$

Zbog $\frac{\alpha-\gamma+\beta-\delta}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \implies$ $\alpha-\gamma+\beta-\delta = 0 \implies \alpha+\beta = \gamma+\delta = \pi$. Dakle stranice b i d tog četverokuta leže na paralelnim pravcima, pa se radi o trapezu.

$$2^\circ \quad \sin\left(\frac{\frac{\alpha-\gamma}{2}-\frac{\beta-\delta}{2}}{2}\right) = 0.$$

Zbog $\frac{\alpha-\gamma-\beta+\delta}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \implies$ $\alpha-\gamma-\beta+\delta = 0 \implies \alpha+\delta = \beta+\gamma = \pi$. Dakle stranice a i c tog četverokuta leže na paralelnim pravcima, pa se opet radi o trapezu.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3492. *Ako su α, β korijeni jednadžbe $x^2+px+1=0$ i γ, δ korijeni jednadžbe $x^2+qx+1=0$, dokaži jednakost*

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta) = q^2-p^2.$$

Rješenje. Iz Vièteovih formula $\alpha\beta = 1$, $\alpha+\beta = -p$, $\gamma\delta = 1$, $\gamma^2 = -q\gamma - 1$, $\delta^2 = -q\delta - 1$, dobivamo

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) = \alpha\beta - (\alpha+\beta)\gamma + \gamma^2 = (p-q)\gamma,$$

$$(\alpha+\delta)(\beta+\delta) = \alpha\beta + (\alpha+\beta)\delta + \delta^2 = -(p+q)\delta$$

tj.

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta) = -(p^2-q^2)\gamma\delta = q^2-p^2.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3493. *Dužina $\overline{AB}$ je promjer četverokutu $ABCD$ opisane kružnice. Neka je P točka na stranici $\overline{CD}$, a Q nožište okomice povučene iz P na stranicu $\overline{AB}$. Dokaži jednakost*

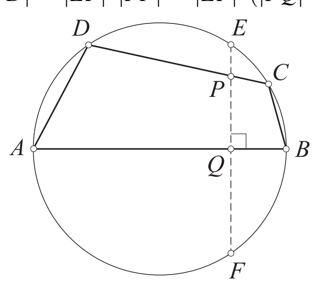
$$|AQ| \cdot |QB| - |CP| \cdot |PD| = |PQ|^2.$$

Prvo rješenje. Korištenjem potencije točke Q s obzirom na kružnicu:

$|AQ| \cdot |QB| = |EQ| \cdot |QF| = (|EP| + |PQ|) \cdot |QF|$;

korištenjem potencije točke P s obzirom na kružnicu:

$|CP| \cdot |PD| = |EP| \cdot |PF| = |EP| \cdot (|PQ| + |QF|)$.

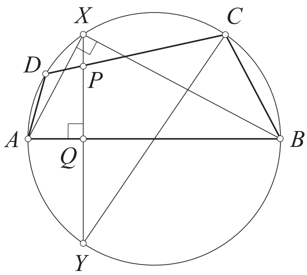


Slijedi

$$|AQ| \cdot |QB| - |CP| \cdot |PD| = |PQ| \cdot (|QF| - |EP|) = |PQ|^2.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Označimo s X i Y sjecišta pravca PQ i kružnice opisane četverokutu.



Trokut ABX je pravokutan pa vrijedi

$$|AQ| \cdot |QB| = |QX|^2. \tag{1}$$

Trokuti PDX i PYC su slični (zbog $\sphericalangle YXD = \sphericalangle YCP$ kao obodni kutovi nad lukom $\overset{\frown}{DY}$ i $\sphericalangle CPY = \sphericalangle DPX$). Stoga je

$$|PD| : |PX| = |PY| : |CP|.$$

Odavde dobivamo

$$|CP| \cdot |PD| = |PX| \cdot |PY|. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobivamo

$$|AQ| \cdot |QB| - |CP| \cdot |PD| = |QX|^2 - |PX| \cdot |PY|.$$

Sada je potrebno dokazati da je desna strana posljednje jednakosti jednaka $|PQ|^2$.

Sa slike vidimo da je $|QX| = |QP| + |PX|$, kao i $|QX| = |QY|$. Dalje je

$$\begin{aligned} |PY| &= |PQ| + |QY| = |PQ| + |PQ| + |PX| \\ &= 2|PQ| + |PX|, \end{aligned}$$

pa onda

$$\begin{aligned} &|QX|^2 - |PX| \cdot |PY| \\ &= (|PQ| + |PX|)^2 - |PX| \cdot (2|PQ| + |PX|) \\ &= |PQ|^2 + 2|PQ| \cdot |PX| + |PX|^2 \\ &\quad - 2|PQ| \cdot |PX| - |PX|^2 = |PQ|^2. \end{aligned}$$

Ur.

3494. *Riješi Diofantovu jednadžbu*

$$7x^2 + 5y + 13 = 0.$$

Rješenje. Napišimo jednadžbu u obliku $5y = -7x^2 - 13$ i rješavajmo kongruenciju

$$-7x^2 - 13 \equiv 0 \pmod 5$$

tj.

$$3x^2 \equiv 3 \pmod 5 \quad \text{odnosno} \quad x^2 \equiv 1 \pmod 5.$$

Iz posljednje kongruencije dobivamo

$$x = 1 + 5t \quad \text{ili} \quad x = -1 + 5t, \ t \in \mathbf{Z}.$$

Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu imamo:

$$5y = -7(1 + 5t)^2 - 13 = -20 - 70t - 175t^2$$

tj. $y = -4 - 15t - 35t^2$, a u drugom slučaju

$$5y = -7(-1 + 5t)^2 - 13 = -20 + 70t - 175t^2$$

tj. $y = -4 + 14t - 35t^2$.

Rješenje polazne kongruencije je

$$x = 1 + 5t, \quad y = -4 - 14t - 35t^2, \ t \in \mathbf{Z}$$

$$x = -1 + 5t, \ y = -4 + 14t - 35t^2, \ t \in \mathbf{Z}.$$

Neposrednom provjerom vidi se da su to i rješenja jednadžbe.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3495. *Na koliko različitih načina možeš od prva 24 prirodna broja izabrati tri, tako da im suma bude djeljiva s 3?*

Prvo rješenje. Uočimo: zbroj tri prirodna broja je djeljiv s 3 ako i samo ako ili sva tri imaju isti ostatak ili sva tri imaju različite ostatke pri djeljenju s 3.

U prvom slučaju, među prva 24 prirodna broja, ih ima $\binom{3}{1}\binom{8}{3} = 168$, a u drugom $\binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} = 512$. Sve zajedno 680.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Algoritamsko rješenje ostvareno u jeziku Pascal:

```
VAR  S,I,J,K:   INTEGER;
BEGIN
S:= 0;
FOR  I:= 1 TO 24 DO
FOR   J:= I +1 TO 24 DO
FOR  K := J +1 TO 24 DO
IF  (I+J+K) MOD 3 = 0 THEN S := S+1;
WRITELN (S);
END.
```

Ukupno 680 kombinacija.

Karlo Cahun, Bruno Babić,
Filip Đuran, Mišo Lukenda (3),
X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb

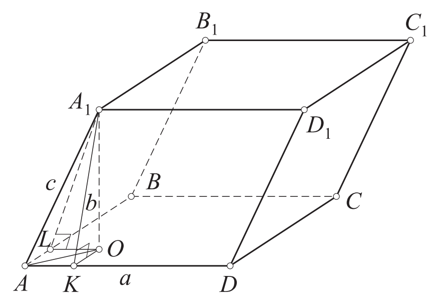
3496. *Svi plošni kutovi uz vrh paralelepipeda su jednaki* 45°. *Duljine njegovih bridova uz taj vrh su* a, b, c. *Koliki je obujam paralelepipeda?*

Prvo rješenje.

$$\sphericalangle A_1AD = \sphericalangle A_1AB = \sphericalangle BAD = 45^\circ$$
$$|AB| = a,\ |AD| = b,\ |AA_1| = c.$$

$\overline{A_1O}$ je visina iz A_1 na stranicu $ABCD$, $A_1K \perp AD$, $A_1L \perp AB$. Tada je $OK \perp AD$ i $OL \perp AB$.

$$\triangle A_1AK \cong \triangle A_1AL \quad \text{i} \quad \triangle A_1KO \cong \triangle A_1LO;$$
$$\sphericalangle OAK = \sphericalangle OAL = 22.5^\circ$$
$$P_{ABCD} = ab\sin 45^\circ = \frac{ab}{\sqrt{2}}.$$



Iz $\triangle A_1AK$ imamo

$$|A_1K| = |AA_1|\sin\sphericalangle A_1AK = C\sin 45^\circ = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Iz $\triangle OAK$ imamo

$$|OK| = |AK|\operatorname{tg} 22.5^\circ = \frac{c\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} 22.5^\circ.$$

Iz $\triangle A_1KO$ imamo

$$\begin{aligned}|A_1O| &= \sqrt{|A_1K|^2 - |OK|^2}\\ &= \frac{c\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 22.5^\circ}\\ &= \frac{c\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{1-\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}\right)^2}\\ &= \frac{c}{\sqrt{\sqrt{2}+1}},\end{aligned}$$

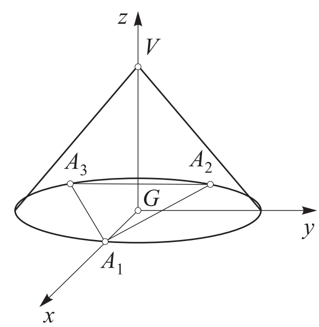
$$V = P_{ABCD}|A_1O| = \frac{abc}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}}.$$

Ur.

Drugo rješenje. U xy ravnini postavimo jediničnu kružnicu s centrom u $(0,0,0)$ i na njoj točke $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $A_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ kao vrhove jednakostraničnog trokuta. Neka je V vrh stošca kojemu je gore navedena kružnica baza tako da je kut između svaka dva vektora $\overrightarrow{VA_1}$, $\overrightarrow{VA_2}$, $\overrightarrow{VA_3}$ jednak 45°. Tada je $V = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)$ i onda za kut φ između izvodnice i osi stošca vrijedi $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$.

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektori koji razapinju paralelepiped, duljina a, b, c redom, a kojima je početak smješten u vrhu V. Završetci tih vektora se tada nalaze na izvodnici, produljenog, gornjeg stošca i imaju koordinate:

$$\vec{a} = a(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$$
$$\vec{b} = b\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi, \cos\varphi\right)$$
$$\vec{c} = c\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi, \cos\varphi\right).$$



Volumen paralelepipeda je jednak mješovitom produktu:

$$\begin{aligned}V &= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\\ &= \begin{vmatrix} a\sin\varphi & 0 & a\cos\varphi \\ -b\frac{1}{2}\sin\varphi & b\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi & b\cos\varphi \\ -c\frac{1}{2}\sin\varphi & -c\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi & c\cos\varphi \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= abc\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}\cdot 3$$

$$= \frac{abc}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 394. *Kad su tri jednaka otpornika spojena serijski na neki izvor, struja u tom krugu iznosi 200 miliampera (mA). Kolika će biti struja ako dva otpornika spojimo paralelno i tu paralelu spojimo serijski s trećim otpornikom na isti izvor?*

Rješenje.

$R_1 = R_2 = R_3 = R$

$\underline{I_1 = 200 \text{ mA}}$

$I_2 = ?$

Kad su otpornici spojeni serijski njihov je ukupni otpor $3R$.

Kad su spojeni paralelno ukupni otpor iznosi

$$R_{\text{ukupno}} = R_p + R = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}.$$

Struja je obrnuto proporcionalna s otporom, dakle, ako se otpor smanji dva puta struja će se povećati dva puta i iznosit će 400 mA. Dakle, $I_2 = 400$ mA.

Nives Ostojić (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 395. *Lokomotiva ima masu 80 tona i vuče 20 vagona. Svaki vagon ima masu 30 tona i u svakome je 20 tona tereta. Faktor trenja između kotača i pruge iznosi 0.008, a snaga lokomotive je 1.5 MW. Kolika je najveća brzina koju ta kompozicija može postići?*

Rješenje.

$m_1 = 80 \text{ t} = 80\,000 \text{ kg}$

$n = 20$

$m_2 = 30 \text{ t} = 30\,000 \text{ kg}$

$m_3 = 20 \text{ t} = 20\,000 \text{ kg}$

$P = 1.5 \text{ MW} = 1\,500\,000 \text{ W}$

$\underline{\mu = 0.008}$

$v = ?$

$$\begin{aligned} m &= m_1 + n\cdot m_2 + n\cdot m_3 \\ &= 80\,000 \text{ kg} + 20\cdot 30\,000 \text{ kg} + 20\cdot 20\,000 \text{ kg} \\ &= 80\,000 \text{ kg} + 600\,000 \text{ kg} + 400\,000 \text{ kg} \\ &= 1\,080\,000 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{tr} &= \mu\cdot G = \mu\cdot m\cdot g \\ &= 0.008\cdot 1\,080\,000\cdot 10\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 86\,400 \text{ N} \end{aligned}$$

$P = F\cdot v$

$$V = \frac{P}{F} = \frac{1\,500\,000 \text{ W}}{86\,400 \text{ N}} = 17.36 \text{ m/s}.$$

Najveća brzina koju ta kompozicija može postići je 17.36 m/s.

Matej Zubić (8),
OŠ OŠ Ljudevit Gaj, Krapina

OŠ – 396. *Izračunaj promjer kugle koja se može napraviti od komada željeza mase 1 kg. Gustoća željeza je* 7800 kg/m^3.

Rješenje.

$m = 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$

$\underline{\rho = 7800 \text{ kg/m}^3 = 7.8 \text{ g/cm}^3}$

$d = ?$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1000 \text{ g}}{7.8 \text{ g/cm}^3} = 128.205 \text{ cm}^3$$

$$r = \frac{3V}{(4\pi)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3\cdot 128.205 \text{ cm}^3}{(4\pi)^{\frac{1}{3}}} = 3.128 \text{ cm}$$

$d = 2r = 2\cdot 3.128 \text{ cm} = 6.256 \text{ cm}.$

Laura Vuković (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 397. *U menzuri unutarnjeg promjera 2 centimetra je 200 grama žive. Izračunaj visinu stupca žive i tlak na dnu menzure? Gustoća žive je* $13\,600 \text{ kg/m}^3$.

Rješenje.

$d = 2 \text{ cm}$

$r = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$

$m = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}$

$\underline{\rho = 13\,600 \text{ kg/m}^3 = 13.6 \text{ g/cm}^3}$

$h = ?$

$p = ?$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{200\ \text{g}}{13.6\ \text{g/cm}^3} = 14.706\ \text{cm}^3$$

$$V = A \cdot h$$

$$h = \frac{V}{A} = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{14.706\ \text{cm}^3}{1\ \text{cm}^2\pi} = 4.68\ \text{cm}$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{r^2\pi} = \frac{0.2\ \text{kg} \cdot 10\ \text{N/kg}}{0.0001\ \text{m}^2\pi}$$
$$= 6366.2\ \text{Pa}.$$

Martina Čuljak (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1595. *Izvor zvuka giba se jednoliko brzinom 9 m/s. Opažač koji miruje čuje ton frekvencije 1519 Hz, a vlastita frekvencija izvora je 1500 Hz. Odredi kut smjera kretanja izvora i smjera izvor-opažač. Brzina zvuka je 340 m/s.*

Rješenje. Iz izraza za Dopplerov efekt možemo odrediti komponentu brzine gibanja prema opažaču v_x:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{v_z + v_x}{v_z}$$
$$\frac{1519}{1500} = \frac{340 + v_x}{340}.$$

Odatle je $v_x = 4.307$ m/s. Traženi kut α nalazi se između katete v_x i hipotenuze $v = 9$ m/s pravokutnog trokuta, pa vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{4.307}{9}.$$

Odatle je $\alpha = 61^\circ 24' 32''$.

Ur.

1596. *Sfera radijusa 7 cm nabijena je jednoliko nabojem $+3$ nC. Koncentrično njoj nalazi se sfera radijusa 10 cm površinske gustoće naboja $+12$ nC/m^2. Odredi električno polje uz vanjski rub veće sfere. Odredi električni potencijal u središtu obiju sfera.*

Rješenje. Izvan veće sfere električno polje je istog smjera i jačine kao da je sav naboj u središtu sfera:

$$E(r) = \frac{k(Q_1 + Q_2)}{r^2}.$$

Naboj veće sfere izračunamo iz površinske gustoće $Q_2 = \sigma \cdot S = 12 \cdot 4\pi 0.1^2 = 1.508$ nC, pa je

$$E(10\ \text{cm}) = \frac{9 \cdot 10^9 (3 + 1.508) \cdot 10^{-9}}{0.1^2}$$
$$= 4057\ \text{V/m}.$$

Potencijal u središtu (i bilo gdje unutar manje sfere) jednak je sumi doprinosa obiju sfera:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2}$$
$$= \frac{27}{0.07} + \frac{13.572}{0.1} = 521.4\ \text{V}.$$

Ur.

1597. *Divergentna leća daje 4.5 puta umanjenu, virtualnu i uspravnu sliku. Odredi jačinu leće ako je udaljenost predmeta i slike 14 cm.*

Rješenje. Udaljenost predmeta i slike je zbroj obje udaljenosti do leće:

$$a + b = 14\ \text{cm}.$$

Veličina slike određuje omjer tih udaljenosti, uz $b < 0$, jer je slika virtualna:

$$\frac{b}{a} = \frac{-1}{4.5}.$$

Rješavanje ovog sustava uvrštavanjem drugog izraza u prvi daje:

$$-4.5b + b = 14$$
$$b = -4\ \text{cm},$$
$$a = 4.5 \cdot 4 = 18\ \text{cm}.$$

Jačinu leće tada izračunamo iz a i b (preračunatih u metre):

$$J = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{0.18} + \frac{1}{-0.04} = -19.444\ \text{dpt}.$$

Amina Alihodžić, Almasa Festa, Dženana Šabović, Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

1598. *Idealan Carnotov toplinski stroj obavlja rad od 396 J u 3 sekunde. Apsolutna temperatura hladnijeg spremnika je 30% manja od temperature toplijeg. Odredi energiju koju u jednoj sekundi stroj uzima od toplijeg rezervoara, i energiju koju u jednoj sekundi predaje hladnijem rezervoaru.*

Rješenje. Rad u jednoj sekundi iznosi $W = \dfrac{396}{3} = 132$ J. Za idealan Carnotov stroj vrijedi

$$\frac{Q_H}{Q_T} = \frac{T_H}{T_T} = \frac{70\%T_T}{100\%T_T} = 0.7.$$

Iz prvog zakona termodinamike $Q_T = Q_H + W$. Rješavanjem sustava dobivamo $Q_T = 440$ J i $Q_H = 308$ J.

Ur.

1599. *Odredi prividnu veličinu (u stupnjevima) Plutonovog satelita Harona, gledano s površine Plutona. Koliko je puta to veće od Mjeseca gledano sa Zemlje? Udaljenost Plutona i Harona je 19 600 km (između dvaju središta), radijus Harona je 603.5 km, a Plutona 1185 km.*

Rješenje. Uz zanemarivanje razlike prividne veličine s različitih točaka Plutona, odaberimo točku najbliže Haronu. Omjer radijusa Harona i udaljenosti Harona jednaka je tangensu polovine prividne veličine, tj.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r_H}{d - r_P} = \frac{603.5}{19\,600 - 1185} = 0.032772.$$

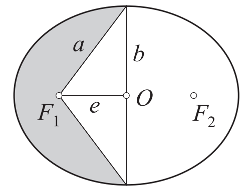
Odatle je prividna veličina $\alpha = 3^\circ 45'$. Kako je prividni promjer Mjeseca sa Zemlje oko $0^\circ 30'$ (varira ovisno o položaju na putanji), Haron s Plutona izgleda oko 7.5 puta veći nego Mjesec sa Zemlje.

Ur.

1600. *Putanja Zemlje oko Sunca je elipsa numeričkog ekscentriciteta $\varepsilon = 0.0167$. Koristeći prvi i drugi Keplerov zakon, odredi koliko vremena Zemlja provede na polovici elipse bliže Suncu. Rezultat izrazi u godinama i u danima, uzeti 365.25 dana za trajanje godine.*

Rješenje. Zamislimo Zemljinu putanju kao elipsu, sa Suncem u fokusu F_1 kao na slici. Ekscentričnost elipse je pretjerana radi jasnoće oznaka. Znamo da je udaljenost F_1 od centra elipse O jednaka $e = \varepsilon a = \sqrt{a^2 - b^2}$, gdje su a i b velika i mala poluos elipse. Drugi Keplerov zakon kaže da je površina koju radijvektor prebrisuje u jednakim vremenskim intervalima jednaka, što znači da je omjer površine i vremena jednak površini elipse kroz ophodni period, tj.

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P}{T} = ab\pi/\text{godina}.$$



Da bi znali koliko vremena Zemlja provede na lijevoj polovici elipse (bliže Suncu od a), treba nam iznos površine označene sjenčanjem. On je

$$\Delta P = \frac{ab\pi}{2} - 2\frac{\varepsilon ab}{2} = ab\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi}\right).$$

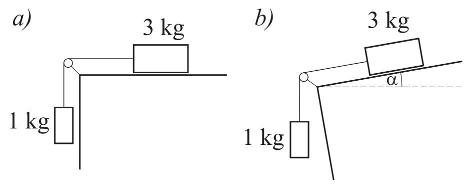
Dobivamo da je Δt u godinama jednak

$$\Delta t = \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi}\right) = 0.494684 \text{ godina}.$$

To iznosi 180.683 dana, tj. 1.942 dana kraće od trajanja polovice godine.

Ur.

1601. *Sustavu utega i koloture na slici a) nakosimo podlogu za kut α kao na slici b). Za $\alpha = 10^\circ$ utezi se gibaju jednoliko prema dolje. Koliki je koeficijent trenja podloge i gornjeg utega? Kojim će se ubrzanjem utezi gibati ako α povećamo na 15°?*



Rješenje. Pri nagibu $\alpha = 10^\circ$, sila koja vuče prema dolje je

$$F = m_1 g + m_2 g \sin\alpha.$$

Sila trenja koja se opire tom gibanju je

$$F_{tr} = \mu m_2 g \cos\alpha.$$

Jednoliko gibanje (bez akceleracije) znači da su iznosi sila jednaki, tj. $F = F_{tr}$. Slijedi

$$m_1 + m_2 \sin\alpha = \mu m_2 \cos\alpha$$

$$1 + 3\sin 10^\circ = \mu \cdot 3\cos 10^\circ.$$

Rješavanjem dobivamo $\mu = 0.5148$. Za kut od 15° akceleracija je razlika dviju sila podijeljena ukupnom masom:

$$a = \frac{F - F_{tr}}{m_1 + m_2} = g\frac{1 + 3\sin 15^\circ - 3\mu\cos 15^\circ}{1 + 3}$$
$$= 0.6982 \text{ m/s}^2.$$

Ur.