

## Sudoku – napredne metode rješavanja (1)

Žarko Čulić<sup>1</sup>

Nakon što smo prošli osnovne i standardne metode rješavanja sudokua, prelazimo na napredne metode. Postoji desetak različitih grupa (tehnika) naprednih metoda, od kojih se većina dijeli u više metoda koje se potom dijele u srodne varijante rješavanja. Na primjer grupa metoda koja je bazirana na dogovorenom pravilu da sudoku smije imati samo jedno točno rješenje i nazvana je *jednoznačnost (Uniqueness)*, ima 6 različitih metoda, od kojih *jednoznačni pravokutnici*, kao najčešća metoda, imaju 6 varijanti (tipova), a *uzorci jednoznačnosti (Deadly Patterns)* imaju tisuće različitih varijanti od kojih u praksi uglavnom koristimo njih 14 vezanih za 4 do 8 polja sudokua. U ovom kratkom osvrtu ukratko ćemo analizirati samo najčešće korištene metode. U prvom nastavku bit će govora o grupi metoda koju nazivamo *krila (Wings)*, a čine je *XY-krilo*, *XYZ-krilo* i *W-krilo*.

**XY-krilo (XY-Wing)** je najjednostavnija i vrlo često korištena metoda. Traže se polja sa samo dva kandidata oblika  $(X, Y)$ ,  $(X, Z)$  i  $(Y, Z)$ . Jedno, središnje (polazno) polje s kandidatima  $(X, Y)$  povezano je s dva preostala polja, odnosno vidi polja s kandidatima  $(X, Z)$  i  $(Y, Z)$ . U tom slučaju, kandidat  $Z$  se može eliminirati iz svih polja koja vide oba polja *XY-krila* s kandidatom  $Z$  (slika 1). U tekstu su brojevi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  i  $n$  proizvoljni brojevi između 1 i 9.

Analiza je vrlo jednostavna i pokazuje da kandidat  $Z$  mora biti rješenje u jednom od vanjskih polja *XY-krila*. Npr. ako je u polju  $(X, Z)$  rješenje  $X$ , tada je u središnjem polju  $(X, Y)$  rješenje  $Y$ , a u trećem polju  $(Y, Z)$  rješenje je  $Z$ . Vrijedi i obratno, ako je u polju  $(Y, Z)$  točan broj  $Y$ , tada je u središnjem polju  $(X, Y)$  točan broj  $X$ , a u polju  $(X, Z)$  rješenje je broj  $Z$ . Dakle, u svakom slučaju kandidat  $Z$  je rješenje u jednom od vanjskih polja  $(X, Z)$  i  $(Y, Z)$ , ne znamo točno u kojem, ali ga možemo eliminirati iz svih preostalih polja koja vide ta dva polja.

<sup>1</sup> Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: zculic@math.hr

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B	$(X,Y)$	$\bar{X}$	$\bar{X}$		$(Y,Z)$				
C			$(X,Z)$	$\bar{X}$	$\bar{X}$	$\bar{X}$			
D									
E									
F									
G									
H									
I									

Slika 1.

Postoje dvije konfiguracije ove jednostavne metode: (1) da su dva polja  $XY$ -krila u istom kvadratu i tada se može eliminirati broj  $Z$  iz do 5 polja (slika 1) i (2) da se sva tri polja  $XY$ -krila nalaze u različitim kvadratima i tada se  $Z$  može eliminirati iz samo jednog polja (slika 2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B		$(X,Y)$						$(X,Z)$	
C									
D									
E									
F									
G		$(Y,Z)$						$\bar{X}$	
H									
I									

Slika 2.

Traženje  $XY$ -krila najčešće započinjemo iz gornjeg lijevog kuta i tražimo u prvom kvadratu parove oblika  $(X,Y)$  i  $(X,Z)$ . Ako ih nađemo tada u redcima i stupcima s tim poljima tražimo polje s kandidatima  $(Y,Z)$ , odnosno  $(Z,Y)$  i ovisno o tome koje je središnje polje, možemo eliminirati broj  $Z$  ili broj  $Y$ . Ako ne nađemo ništa u prvom kvadratu ili ništa ne možemo eliminirati, treba prijeći na drugi kvadrat i tako redom do kraja mreže. Ako ništa ne pronađemo na ovaj način (prva konfiguracija), treba pretražiti retke u kojima su polja s parovima kandidata oblika  $(X,Y)$  i  $(X,Z)$  i ovisno o tome koje je središnje polje, tražimo u tim stupcima polje s  $(Y,Z)$ , odnosno  $(Z,Y)$  (druga konfiguracija). Ovaj postupak se može raditi i u jednom prolazu kroz mrežu.

Pogledajmo  $XY$ -krilo na konkretnom primjeru:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7	1	4	2 <sub>9</sub>	6	2 <sub>9</sub>	5	3	8
B	8	2 <sub>9</sub>	2 <sub>9</sub>	4	5	3	1 <sub>6</sub>	1 <sub>6</sub>	7
C	3	5	6	7	1	8	4	2	9
D	6	3 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	3 <sub>9</sub>	2	4	7 <sub>6</sub>	8	5
E	4	6 <sub>9</sub>	7 <sub>7</sub>	9 <sub>9</sub>	5 <sub>8</sub>	9 <sub>8</sub>	5 <sub>9</sub>	3 <sub>7</sub>	6 <sub>6</sub>
F	2	8	5	3	7	6	9	4	1
G	9	7	8	6	3	1	2	5	4
H	5	4	2 <sub>3</sub>	1 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	2 <sub>5</sub>	7	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>
I	5	6	4	2	6	1	2	2	3

**XYZ-krilo (XYZ-Wing)** je metoda slična *XY-krilu*, ali sada središnje polje uz kandidate  $X$  i  $Y$  sadrži i kandidata  $Z$ . Tražimo polje s trojkom  $(X, Y, Z)$  koje u istom kvadratu ima polje koje sadrži jedan par kandidata od  $X, Y, Z$ , npr.  $(X, Z)$  i povezano je s poljem izvan kvadrata koje sadrži jedan od druga dva para kandidata, npr.  $(Y, Z)$ . Tada možemo eliminirati sve kandidate  $Z$  iz polja koja vide sva tri polja *XYZ-krila* (slika 3). Očito je da će se svi eliminirani kandidati  $Z$  nalaziti unutar kvadrata sa središnjom trojkom  $(X, Y, Z)$ .

Analiza je opet jednostavna: pretpostavimo da je rješenje polja s parom  $(X, Z)$  broj  $Z$ , tada bi odmah mogli eliminirati sve kandidate  $Z$  iz tog kvadrata. Ako je rješenje broj  $X$  u polju  $(X, Z)$ , tada iz trojke  $(X, Y, Z)$  možemo eliminirati broj  $X$  i ostaje  $(Y, Z)$  koji s trećim poljem  $(Y, Z)$  čini *par*, odnosno *zaključani set* (vidi standardne metode u prethodnom broju MFL-a) i opet možemo eliminirati  $Z$  iz svih povezanih polja unutar toga kvadrata. Analogno se dobije ako krenemo analizu od polja  $(Y, Z)$ . U oba slučaja,  $Z$  je rješenje u jednom od ta tri polja koja čine *XYZ-krilo* i stoga možemo eliminirati  $Z$  iz svih polja koja vide sva ta tri polja.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B	$(X, Y, Z)$	$X$	$X$		$(Y, Z)$				
C			$(X, Z)$						
D									
E									
F									
G									
H									
I									

Slika 3.

Traženje *XYZ-krila* također započinjemo iz gornjeg lijevog kuta i tražimo u prvom kvadratu polje s trojkom kandidata (središnje polje) oblika  $(X, Y, Z)$  i polje s parom

kandidata od trojke  $X, Y, Z$ , npr.  $(X, Z)$ . Ako ih nađemo, tada u retku  $i$  u stupcu sa središnjim poljem tražimo polje s parom kandidata  $(X, Y)$  ili s parom kandidata  $(Y, Z)$ . U prvom slučaju možemo eliminirati broj  $X$ , a u drugom broj  $Z$  iz svih polja tog kvadrata izvan polja koja čine  $XYZ$ -krilo. Nakon prvog kvadrata, treba prijeći na drugi kvadrat i tako redom do kraja mreže.

Evo primjera  $XYZ$ -krila:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	7	3	4 5	8	1 4 5	2	1 4	9
B	5	1	4	6 7	9	2	6 7 8		3
C	9	8	2	4 6 7	6 7	3 4 6 7	4 6 7	1 4 7	5
D	1	6	7	3	5	9	4 8	4 8	2
E	8	4 2	9	4 2	1	4 7	5	3	6
F	4 2 3	4 2 3	5	8	2 6 4	6	7	9	1
G	7 3	5 3	6	1	4	5 3	9	2	8
H	2 7	2 9	1	2 6 7 9	2 6 7	8	3	5	4
I	4 2 3	4 2 3	8	2 5 9	2 3 5	3	1	6	7

Analogno metodi  $XYZ$ -krilo, postoje metode s 4 kandidata ( $XYZW$ -krilo), s 5 kandidata ( $XYZWV$ -krilo), sa 6 kandidata ( $XYZWVU$ ), itd., ali su one u praksi rijetko zastupljene.

**W-krilo** (*W-Wing*) je jednostavna i često veoma učinkovita metoda. Tražimo dva nepovezana polja s istim parovima kandidata (polazna polja) koja imaju *jaku povezanost* (*strong link*) na jednom od kandidata, tj. da su to jedini takvi kandidati u tom povezanom području (retku, stupcu ili kvadratu). Tada možemo eliminirati drugog kandidata iz svih polja koja vide oba polazna polja (slika 4).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B		$(X, Y)$					$X$		
C									
D									
E									
F		$X$					$(X, Y)$		
G									
H		$X, n$					$X, n$		
I									

Slika 4.

Analiza metode je sljedeća: ako je u bilo kojem od dva polja s jakom vezom točan kandidat  $X$  (a po definiciji *jake povezanosti* barem jedan mora biti točan), tada je u

povezanom polaznom paru  $(X, Y)$  točan broj  $Y$ . Dakle, u svakom slučaju je u jednom od polaznih polja točan broj  $Y$ . Ne znamo točno u kojem je polju rješenje broj  $Y$ , ali ga možemo eliminirati iz svih polja koja vide oba polazna.

Traženje *W-krila* svodi se na traženje dva (polazna) polja s istim parom kandidata koja se međusobno ne vide (ako se vide, tada imamo *zaključani set*). Sada odaberemo jedno od tih polja i pretražimo taj redak prvo po jednom, pa po drugom kandidatu, tražeći da se u stupcu nalazi taj kandidat samo dvaput i to tako da je jedan povezan s prvim, a drugi s drugim polaznim poljem. Ako nismo ništa pronašli, tada trebamo napraviti to isto s tim da zamijenimo retke i stupce. Sada pretražujemo stupac prvo po jednom, pa po drugom kandidatu, tražeći da se u retku nalazi taj kandidat samo dvaput i to tako da je jedan povezan s prvim, a drugi s drugim polaznim poljem.

Pogledajmo *W-krilo* na konkretnom primjeru:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	4	3	9	5	8	7	4	1
B	3	1	3	9	6	2	4	8	5
C	2	5	8	6	3	1	2	6	4
D	1	6	4	3	8	9	7	5	2
E	2	3	3	1	7	5	9	4	6
F	5	9	7	2	4	6	3	1	8
G	9	2	5	4	1	7	6	8	3
H	3	1	3	5	6	2	1	1	4
I	1	4	6	8	9	3	2	4	5

Zadaci za vježbu s rješenjima (riješite primjenom *XY-krila*, *XYZ-krila* i *W-krila*):

### Zadatak 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	3			6				
B			6				4		
C				7	2				
D	6		8		7		5	9	
E	4			2	5	9			8
F		7	9		8		1		2
G					9	7			
H			2				6		
I					3			4	9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	3	7	8	6	4	9	2	5
B	2	5	6	9	1	3	4	8	7
C	9	8	4	7	2	5	3	1	6
D	6	2	8	3	7	1	5	9	4
E	4	1	3	2	5	9	7	6	8
F	5	7	9	4	8	6	1	3	2
G	8	4	1	6	9	7	2	5	3
H	3	9	2	5	4	8	6	7	1
I	7	6	5	1	3	2	8	4	9

**Zadatak 2.**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9				1		6		
B			3	2					
C				6			2	9	4
D		4							8
E	2		7				5		3
F	1							7	
G	8	7	6			5			
H						6	3		
I			1		8				5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	2	4	5	1	8	6	3	7
B	7	6	3	2	4	9	8	5	1
C	5	1	8	6	3	7	2	9	4
D	6	4	9	7	5	3	1	2	8
E	2	8	7	9	6	1	5	4	3
F	1	3	5	8	2	4	9	7	6
G	8	7	6	3	9	5	4	1	2
H	4	5	2	1	7	6	3	8	9
I	3	9	1	4	8	2	7	6	5