Zadaci iz matematike s državne mature 2015. u Južnoj Koreji (viša razina)

Julije Jakšetić[1] *i Robert Soldo*[2]

Državna matura u Južnoj Koreji, skraćeno *Suneung*, je standardizirani ulazni test za upise na fakultete. Svaki učenik koji želi upisati neki od fakulteta mora proći *Suneung*. Test se sastoji od pet dijelova: korejskog jezika, matematike, engleskog jezika, društvene skupine predmeta i stranog jezika/ kineskog pisma.

Sve se održava u jednom jedinom danu.

Suneung se tradicionalno održava drugog četvrtka u studenom. U Južnoj Koreji velika je pažnja posvećena obrazovanju i trenutno je na snazi sedma verzija kurikuluma uvedenog 2004. godine, s revizijama 2007. i 2009. godine. Učinci ulaganja u obrazovanje se vide u statistici: BDP se nakon Korejskog rata, od 1962. do danas, povećao za 40 000 posto (vidi [5]).

Za vrijeme održavanja testa pred školama mnoštvo roditelja moli za uspjeh djece na maturi. Ne čudi zato što i korejski i svjetski mediji prate fenomen *Suneung* (vidi npr. [2], [4]).

U nastavku donosimo 30 zadataka s više razine matematike *Suneunga* održanog 13. 11. 2014. (zadaci se mogu naći na [1]). U svim zadacima je dan odgovor, a teži su riješeni. Neka sam čitatelj prosudi težinu zadataka i razinu gradiva koja se traži.

1. Zadane su dvije matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Nađite zbroj svih elemenata matrice $A + B$.

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8 **E.** <u>9</u>

[1] Julije Jakšetić je docent na Fakultetu strojarstva i bodogradnje; e-pošta: `julije@math.hr`

[2] Robert Soldo je inženjer teorijske matematike u tvrtki Agit d.o.o;
e-pošta: `robert.soldo@agitdoo1.onmicrosoft.com`

2. Izračunajte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3x}$.

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\underline{\frac{1}{3}}$ **D.** $\frac{1}{4}$ **E.** $\frac{1}{5}$

3. Nađite maksimum funkcije $f(x)=\sin x+\sqrt{7}\cos x-\sqrt{2}$.

A. $\underline{\sqrt{2}}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** $\sqrt{5}$ **E.** $\sqrt{6}$

4. Izračunajte $\int\limits_0^1 3\sqrt{x}dx$.

A. 1 **B.** $\underline{2}$ **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

5. Zadane su dvije točke u koordinatnom prostoru $A(2,a,-2)$, $B(5,-3,b)$. Koliki je zbroj $a+b$ ako se točka koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru $2:1$ nalazi na x-osi.

A. 10 **B.** 9 **C.** 8 **D.** $\underline{7}$ **E.** 6

6. Dva linearna preslikavanja f i g zadana su matricama $\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Koliko iznosi parametar a ako kompozicija preslikavanja $f\circ g$ točku $(1,2)$ preslikava u točku $(a,6)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** $\underline{3}$ **D.** 4 **E.** 5

Rješenje. Kako je $(f\circ g)(1,2)^\tau=f(g(1,2)^\tau)$ imamo:

$$g(1,2)^\tau=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ -1\end{pmatrix}$$

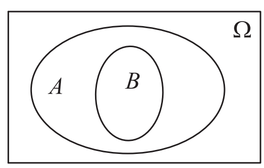
$$f(2,-1)^\tau=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ 6\end{pmatrix}.$$

Dakle, $a=3$.

7. Za geometrijski niz vrijedi $a_1=3$, $a_2=1$. Izračunajte: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

A. $\underline{\frac{81}{8}}$ **B.** $\frac{83}{8}$ **C.** $\frac{85}{8}$ **D.** $\frac{87}{8}$ **E.** $\frac{89}{8}$

8. Za dva događaja A i B vrijedi da A^C i B isključuju jedan drugog i $P(A)=2P(B)=\dfrac{3}{5}$. Koliko iznosi $P(A\cap B^C)$?



A. $\frac{7}{20}$ **B.** $\underline{\frac{3}{10}}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{5}$ **E.** $\frac{3}{20}$

Rješenje. $A^C\cap B=\emptyset \implies B\subseteq A \implies$

$$P(A\cap B^C)=P(A\setminus B)=P(A)-P(B)=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}.$$

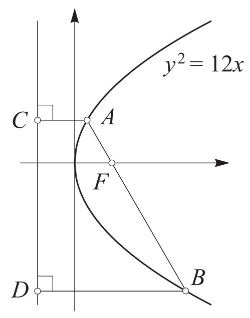
9. Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)\cdot\dfrac{2}{n}$, gdje je $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

A. $\ln 2$ **B.** $\underline{\ln 3}$ **C.** $2\ln 2$ **D.** $\ln 5$ **E.** $\ln 6$

Rješenje. Korištenjem Riemannovih suma imamo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\int_1^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^3 \frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^3=\ln 3.$$



10. Na slici je prikazana parabola $y^2 = 12x$ i kroz njen fokus F je položen pravac koji ju siječe u točkama A i B. Iz tih točaka spuštene su okomice na ravnalicu čija su nožišta točke C i D. Ako je $|AC| = 4$, koliko iznosi $|BD|$?

A. <u>12</u> **B.** $\frac{25}{2}$ **C.** 13 **D.** $\frac{27}{2}$ **E.** 14

11. Težina jedne vrećice slatkiša proizvedenih u tvornici u prosjeku iznosi 75 g, a ravna se po zakonu normalne razdiobe uz standardnu devijaciju 2 g. Koristeći standardnu normalnu razdiobu nađite vjerojatnost da je nasumce izabrana vrećica slatkiša teška između 76 g i 78 g.

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1	0.3413
1.5	0.4332
2	0.4772

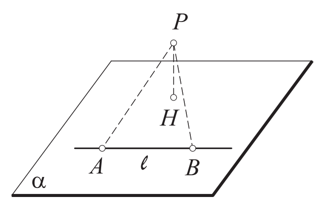
A. 0.0440 **B.** 0.0919 **C.** 0.1359 **D.** 0.1498 **E.** <u>0.2417</u>

Rješenje.

$$X \sim N(75, 2^2) \implies Z = \frac{X-75}{2} \sim N(0,1) \implies$$

$$P(76 \le X \le 78) = P(0.5 \le Z \le 1.5) = P(0 \le Z \le 1.5) - P(0 \le Z \le 0.5)$$

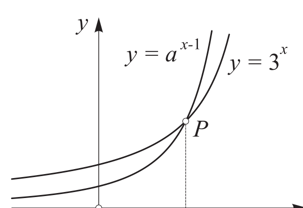
$$= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417.$$



12. Dana je ravnina α i na njoj dvije različite točke A, B kroz koje je povučen pravac ℓ. Izabrana je točka P izvan ravnine α iz koje je spuštena okomica na ravninu s probodištem H. Ako je $|AB| = |PA| = |PB| = 6$, $|PH| = 4$, nađite udaljenost točke H od pravca ℓ.

A. <u>$\sqrt{11}$</u> **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{13}$ **D.** $\sqrt{14}$ **E.** $\sqrt{15}$

⋆⋆⋆



Za iduća dva zadatka neka su zadani realan parametar $a > 3$ i dvije krivulje $y = a^{x-1}$ i $y = 3^x$ koje se sijeku u točki P čija je x-koordinata jednaka k.

13. Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{n+1}+1}$.

Rješenje. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{n+1}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{k-1}}{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{n+1}}} = \left(\dfrac{a}{3}\right)^{k-1}$.

14. U točki P krivulje $y=3^x$ povučena je tangenta koja x-os siječe u točki A, te je u istoj točki P krivulje $y=a^{x-1}$ povučena tangenta koja x-os siječe u točki B. Ako za točku $H(k,0)$ vrijedi $|AH|=2|BH|$, koliki je parametar a?

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** <u>9</u> **E.** 10

Rješenje.

$$t_A \ldots y-3^k = 3^k \ln 3(x-k) \implies A\left(k-\frac{1}{\ln 3}, 0\right)$$

$$t_B \ldots y-a^{k-1} = a^{k-1} \ln a(x-k) \implies B\left(k-\frac{1}{\ln a}, 0\right)$$

Iz uvjeta $|AH| = 2\cdot|BH| \implies \dfrac{1}{\ln 3} = 2\cdot\dfrac{1}{\ln a} \implies a=9$.

15. Ukupan broj učenika u nekoj školi je 320. Prema rezultatima ankete, matematičkom kružoku pristupilo je 60 posto dječaka i 50 posto djevojčica. Iz matematičkog kružoka nasumce biramo jednog učenika. Vjerojatnost da smo odabrali dječaka je p_1, a vjerojatnost da smo odabrali djevojčicu je p_2. Ako vrijedi $p_1=2p_2$, koliki je broj dječaka u toj školi?

A. 170 **B.** 180 **C.** 190 **D.** <u>200</u> **E.** 210

Rješenje. Neka u školi ima d_1 dječaka i d_2 djevojčica. Tada je $d_1+d_2=320$.

$$p_1 = \frac{\frac{3}{5}d_1}{\frac{3}{5}d_1+\frac{1}{2}d_2}, \qquad p_2 = \frac{\frac{1}{2}d_2}{\frac{3}{5}d_1+\frac{1}{2}d_2}.$$

Zbog uvjeta $p_1=2p_2$ slijedi $\dfrac{3}{5}d_1 = d_2 \implies d_1=200$.

16. Za dvije kvadratne matrice drugog reda vrijedi: $A^2-AB=3E$, $A^2B-B^2A=A+B$. Koja je od sljedećih tvrdnji točna?

a) A ima inverznu matricu; b) $AB=BA$; c) $(A+2B)^2=24E$,

gdje je E jedinična matrica.

A. a) **B.** c) **C.** a), b) **D.** b), c) **E.** <u>a), b), c)</u>

Rješenje.

a) $A^2-AB=3E$, $A(A-B)=3E$, $A^{-1}=\dfrac{1}{3}(A-B)$.

b) $A\cdot\left[\dfrac{1}{3}(A-B)\right] = \dfrac{1}{3}(A-B)\cdot A = E \implies A(A-B)=(A-B)A$

$\implies A^2-AB=A^2-BA \implies AB=BA$.

c) Iz b) dijela slijedi: $A^2B - B^2A = A^2B - AB^2$. Sada je redom:

$$A^2 - AB = 3E \implies A^2B - AB^2 = 3B \implies A + B = 3B \implies A = 2B.$$

$$A^2 - AB = 3E \implies 4B^2 - 2B^2 = 3E \implies B^2 = \frac{3}{2}E.$$

Konačno je: $(A + 2B)^2 = (2B + 2B)^2 = 16B^2 = 16 \cdot \frac{3}{2}E = 24E$.

17. Niz $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ zadovoljava relaciju

$$a_{n+1} = (n+1)S_n + n! \qquad (n \geq 1).$$

Nađite opći član niza a_n koristeći sljedeći obrazac.
Za prirodan broj n vrijedi: $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, gdje je $S_{n+1} = (n+2)S_n + n!$ $(n \geq 1)$.
Ako obje strane podijelimo s $(n+2)!$ imamo:

$$\frac{S_{n+1}}{(n+2)!} = \frac{S_n}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Označimo li s $b_n = \dfrac{S_n}{(n+1)!}$, imamo $b_1 = \dfrac{1}{2}$ i $b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Za niz b_n nađite opći član $b_n = \dfrac{f(n)}{n+1}$, a potom i $S_n = f(n) \cdot n$, $a_n = g(n) \cdot (n-1)!$.
Koliko je $f(7) + g(6)$?

A. 44 **B.** 41 **C.** $\underline{38}$ **D.** 35 **E.** 32

Rješenje.

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \implies b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

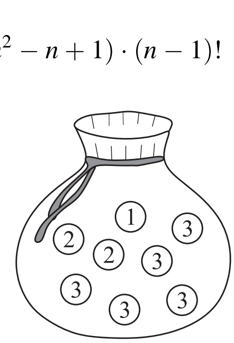
$$\left.\begin{aligned} b_2 - b_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ b_3 - b_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ b_n - b_{n-1} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}\right\}$$

Odavde je: $b_n - b_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} \implies b_n = \dfrac{n}{n+1} \implies S_n = (n+1)! \cdot b_n = n \cdot n!$ tj. $f(n) = n$. Sada je:

$$a_n = n \cdot S_{n-1} + (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-1)! + (n-1)! = (n^2 - n + 1) \cdot (n-1)!$$

tj. $g(n) = n^2 - n + 1$, $f(7) + g(6) = 7 + 31 = 38$.

18. U vrećici se nalazi jedna kuglica označena brojem 1, dvije označene brojem 2, te njih pet označenih brojem 3. Nasumce izvlačimo jednu kuglicu, te nakon što utvrdimo njen broj vraćamo ju natrag. Taj postupak ponavljamo dva puta i neka je $\overline{X}$ prosječna vrijednost izvučenih kuglica. Koliko iznosi $P(\overline{X} = 2)$?



A. $\dfrac{5}{32}$ **B.** $\dfrac{11}{64}$ **C.** $\dfrac{3}{16}$ **D.** $\dfrac{13}{64}$ **E.** $\underline{\dfrac{7}{32}}$

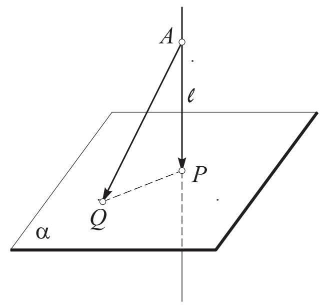
Rješenje. $\overline{X}=2$ je u tri slučaja: $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$.

$$P(\overline{X}=2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{32}.$$

19. U koordinatnom prostoru zadan je pravac $l\ldots\frac{x}{2}=6-y=z-6$ i ravnina α na koju je taj pravac okomit i probada ju u točki $P(2,5,7)$. Na pravcu l odabrana je točka $A(a,b,c)$ i u ravnini α točka Q tako da vrijedi $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=6$. Koliko iznosi $a+b+c$ $(a>0)$?

A. 15 **B.** <u>16</u> **C.** 17 **D.** 18 **E.** 19

Rješenje. $l\ldots\frac{x}{2}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-6}{1}$ tj. $\vec{a}=(2,-1,1)$ je vektor smjera pravca, te ujedno vektor normale ravnine



$$\alpha\ldots 2(x-2)-(y-5)+(z-7)=0$$
$$2x-y+z=6$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ})=|\overrightarrow{AP}|^2+\underbrace{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}}_{=0}$$

$$\Longrightarrow\ |\overrightarrow{AP}|^2=6\ \Longrightarrow\ |\overrightarrow{AP}|=\sqrt{6}.$$

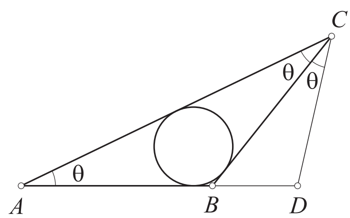
Stavimo li $\frac{x}{2}=6-y=z-6=t\quad(t>0)\implies a=2t,\quad b=6-t,\quad c=t+6$, pa je

$$A(2t,6-t,t+6).$$

$$|\overrightarrow{AP}|=d(A,P)=\sqrt{(2t-2)^2+(6-t-5)^2+(t+6-7)^2}=\sqrt{6}.$$
$$\Longrightarrow\ 6t^2-12t=0\ \Longrightarrow\ 6t(t-2)=0\ \Longrightarrow\ t=2.$$

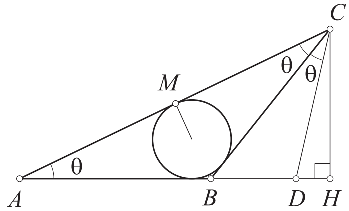
Sada je $A(4,4,8)\implies a+b+c=16$.

20. Zadan je jednakokračan trokut ABC takav da je $\sphericalangle CAB=\sphericalangle BCA=\theta$ i radijus njemu upisane kružnice je 1. Dužina $\overline{AB}$ produžena je do točke D tako da je $\sphericalangle DCB=\theta$. Ako je površina trokuta BDC jednaka $S(\theta)$, izračunajte $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\{\theta\cdot S(\theta)\}$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$.



A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{8}{9}$ **C.** $\frac{10}{9}$ **D.** $\underline{\frac{4}{3}}$ **E.** $\frac{14}{9}$

Rješenje. Neka je M polovište od $\overline{AC}$. Tada je $|AM|=\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$, pa je i



$$|AB|=|BC|=\frac{|AM|}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta\cdot\tan\frac{\theta}{2}}.$$

Spustimo sada okomicu iz točke C na produžetak stranice $\overline{AD}$ i dobijemo nožište H. Sada je

$$\sphericalangle ABC = 180^\circ - 2\theta \implies \sphericalangle CBD = 2\theta \implies |\overline{CH}| = |\overline{BC}| \cdot \sin 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta \cdot \tan\dfrac{\theta}{2}}.$$

Također je $\sphericalangle CDH = 3\theta$, pa je:

$$|CD| = \frac{|CH|}{\sin 3\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \cdot \cos\theta \cdot \tan\dfrac{\theta}{2}}.$$

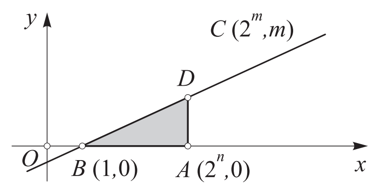
Imamo

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \sin\theta = \frac{\sin^2\theta}{\tan^2\dfrac{\theta}{2} \cdot \sin 3\theta \cdot \cos\theta}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0^+}\{\theta \cdot S(\theta)\} &= \lim_{\theta\to 0^+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\dfrac{\theta}{2}}{\tan\dfrac{\theta}{2}}\right)^2 \cdot \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{4}{3}\right\}\\ &= 1^2 \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

21. Za prirodan broj n, s a_n označimo najmanji prirodan broj m za koji vrijedi sljedeće:
a) točka A ima koordinate $(2^n, 0)$;
b) točke $B(1,0)$ i $C(2^m, m)$ određuju pravac koji prolazi točkom D čija je x koordinata 2^n.
Površina trokuta ABD je manja ili jednaka $\frac{m}{2}$.
Izračunajte $\sum_{n=1}^{10} a_n$.



A. 109 **B.** 111 **C.** 113 **D.** 115 **E.** 117

Rješenje. $|AB| = 2^n - 1$, $|BC_1| = 2^m - 1$, $|CC_1| = m$. Iz

$$(2^n - 1) : (2^m - 1) = |AD| : m \implies |AD| = \frac{m \cdot (2^n - 1)}{2^m - 1},$$

pa je

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot (2^n - 1) \cdot \frac{m \cdot (2^n - 1)}{2^m - 1} \le \frac{m}{2} \implies (2^n - 1)^2 \le 2^m - 1.$$

$$\left.\begin{array}{r}(2-1)^2 = 1 \le 2^m - 1 \implies m = 1\\ (2^2-1)^2 = 3^2 \le 2^m - 1 \implies m = 4\\ (2^3-1)^2 = 7^2 \le 2^m - 1 \implies m = 6\\ \vdots\\ (2^{10}-1)^2 = 1023^2 \le 2^m - 1 \implies m = 20\end{array}\right\}$$

Odavde je: $\sum\limits_{n=1}^{10} a_n = 1 + \sum\limits_{n=2}^{10} 2n = 109$.

22. Nađite rješenja jednadžbe $\log_2(x+6)=5$.
Rezultat. $x=26$.

23. Zadana je funkcija $f(x)=\cos x+4\cdot e^{2x}$. Koliko iznosi $f'(0)$?
Rezultat. $f'(0)=8$.

24. Umnožak svih realnih rješenja iracionalne jednadžbe $x^2-6x-\sqrt{x^2-6x-1}=3$ jednak je k. Koliko je k^2?
Rezultat. $k^2=25$.

25. Kada komprimiramo izvorne slike, digitalne i ostale fotografije pojavljuju se maksimalni omjer signala šuma izvorne i komprimirane fotografije P, srednja kvadratna pogreška slike (standardna devijacija) E te vrijedi:

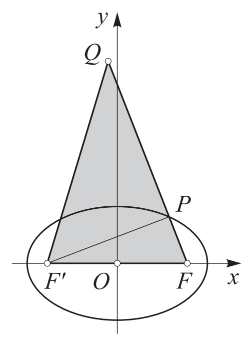
$$P=20\log 255-10\log E \quad (E>0).$$

Ako imamo dvije originalne slike A, B maksimalnog omjera signala i šuma P_A, P_B i neka su njihove srednje kvadratne pogreške E_A, E_B. Ako vrijedi $E_B=100E_A$ izračunajte P_A-P_B.
Rezultat. $P_A-P_B=20$.

26. Koliki je broj uređenih trojki prirodnih brojeva (a,b,c) koji zadovoljavaju uvjete:
a) $a\cdot b\cdot c$ je neparan broj; b) $a\leq b\leq c\leq 20$?

Rješenje. Između 1 i 19 imamo 10 neparnih prirodnih brojeva. Traženi broj jednak je broju kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda od n elemenata, $n=10$, $k=3$:

$$\overline{C}_n^k=\binom{n+k-1}{k}=\binom{12}{3}=220.$$



27. Zadana je elipsa $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ sa svoja dva fokusa, od kojih je F na pozitivnom, a F' na negativnom dijelu x-osi. Neka je točka P na elipsi odabrana u prvom kvadrantu tako da je $\sphericalangle FPF'=\dfrac{\pi}{2}$. Pridružimo sada dužinu $\overline{FP}$ do točke Q tako da je $|FQ|=6$ (kao na slici). Nađite površinu trokuta $QF'F$.
Rezultat. $P_{\triangle QF'F}=12$.

28. Funkcija $f(x)=\int_0^x(a-t)e^t dt$, gdje je a pozitivan realan parametar, ima maksimalnu vrijednost 32. Nađite površinu područja kojeg zatvaraju krivulja $y=3e^x$ i dva pravca $x=a$, $y=3$.

Rješenje. $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x(a-t)e^t dt=(a-x)e^x \implies f'(x)=0$ za $x=a$, pa u toj točki funkcija poprima svoj maksimum. Parcijalnom integracijom izračunamo:

$$f(x)=\int_0^x(a-t)e^t dt=(a+1-x)e^x-a-1.$$

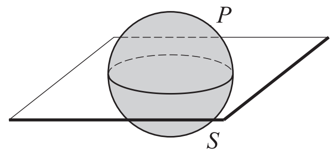
Sada je $f(a)=e^a-a-1=32 \implies e^a-a=33 \implies$

$$P=\int_0^a(3e^x-3)dx=(3e^x-3x)\Big|_0^a=3e^a-3a-3=3\cdot 33-3=96.$$

29. Neka je zadana sfera $S\ldots x^2+y^2+z^2=50$ i točka $P(0,5,5)$ na njoj. Familija kružnica k zadovoljava sljedeće uvjete:

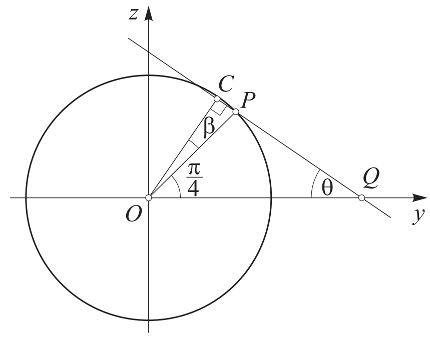
a) sve kružnice familije sadrže točku P i smještene su na sferi S;

b) polumjer svih kružnica familije je 1.



Gledamo ortogonalne projekcije tih kružnica na xy-ravninu. Ako je maksimalna površina neke od projekcija $\frac{q}{p}\pi$, koliko iznosi $p+q$ (p i q su relativno prosti prirodni brojevi)?

Rješenje. Kružnica ω i ravnina α koja ju sadrži s xy ravninom zatvaraju kut veličine θ $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$. Kako je radijus od ω jednak 1, površina njene ortogonalne projekcije iznosi $\pi\cdot\cos\theta$. Dakle, površina ortogonalne projekcije je veća što je kut θ manji, pa kružnica koju tražimo ima središte u yz ravnini. Neka je C centar te kružnice, te neka se pravac CP i y-os sijeku u točki Q. Kako je $|OP|=\sqrt{50}$, $|CP|=1$ i $\sphericalangle OCP=\frac{\pi}{2}\implies |OC|=\sqrt{50-1}=7$.



Označimo $\beta=\sphericalangle COP \implies \cos\beta=\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{50}}$. Dalje, $\theta=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\implies$

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\beta+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\beta$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{7}{\sqrt{50}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{4}{5}.$$

Dakle, maksimalna površina iznosi: $P_{max}=\frac{q}{p}\pi=\frac{4}{5}\pi\implies p+q=9$.

30. Ako je zadana funkcija $f(x)=e^{x+1}-1$ i prirodan broj n definiramo funkciju:

$$g(x)=100\cdot|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|.$$

Nađite sumu svih prirodnih brojeva n za koje je funkcija $g(x)$ derivabilna na cijelom skupu $\mathbf{R}$.

Rješenje. Za $m\in\mathbf{N}$

$$x\mapsto|f(x^{2m-1})|=\begin{cases} e^{x^{2m-1}+1}-1, & x\ge-1\\ -e^{x^{2m-1}+1}+1, & x<-1\\ 0, & x=-1\end{cases}$$

i

$$x\mapsto|f(x^{2m})|=e^{x^{2m}+1}-1,\quad x\in\mathbf{R},$$

su neprekidne na $\mathbf{R}$.

Funkcija $x \mapsto |f(x^{2m-1})|$ nije derivabilna jedino u $x = -1$:

$$\frac{d}{dx}|f(x^{2m-1})| = \begin{cases} -(2m-1)\cdot x^{2m-2}\cdot e^{x^{2m-1}+1}, & x < -1 \\ (2m-1)\cdot x^{2m-2}\cdot e^{x^{2m-1}+1}, & x > -1 \end{cases}$$

tj. njezina lijeva derivacija u $x = 1$ iznosi $-(2m-1)$, a desna derivacija u $x = 1$ iznosi $2m-1$. Ako je $n = 2m-1$, funkcija g je derivabilna na $\mathbf{R}$ ako je

$$\lim_{x\to -1-} g'(x) = \lim_{x\to -1+} g'(x),$$

tj.

$$-100 + \sum_{k=1}^{m}(2k-1) = 100 - \sum_{k=1}^{m}(2k-1) \iff m^2 = 100 \implies m = 10.$$

Dakle, $n = 19$ je jedini neparni broj za koji je funkcija g derivabilna na $\mathbf{R}$, a kako je $x \mapsto |f(x^{20})| = e^{x^{20}+1} - 1$ derivabilna svugdje, to je $n = 20$ jedini paran broj za koji je funkcija g derivabilna svugdje. Dakle, odgovor je $19 + 20 = 39$.

Literatura

[1] `http://chanyi.tistory.com/`

[2] `www.tportal.hr/vijesti/svijet/155471/Kako-prezivjeti-najbolji-skolski-sustav-na-svijetu.html`

[3] LIANG CHOON WANG, *The Deadly Effect of High-Stakes Testing on Teenagers with Reference-Dependent Preferences*, Journal of Population Economics, pp. 1–20.

[4] *A Day of Reckoning – "Suneung"*, `http://elwood5566.net/`

[5] `en.wikipedia.org/wiki/Economy of South Korea`

[6] `en.wikipedia.org/wiki/College_Scholastic_Ability_Test_(South_Korea)`