Ivančević Vladimir
Zavod za fizičku kulturu, Beograd

Primljeno 5. 4. 1981.

TEORIJSKI MODEL MIŠIĆNE KONTRAKCIJE

SAŽETAK

U radu je izvršen pokušaj teorijskog modeliranja mišićne kontrakcije sa tri različita fizička aspekta: mehanike krutog tela, mehanike deformabilnog tela i elektromagnetne teorije. Na bazi fundamentalnih zakona fizike izvedene su tenzorske diferencijalne jednačine mišićnog vlakna kao model procesa njegove kontrakcije. Jednačine su date u najopštijem obliku kako bi mogle prihvatiti sve postojeće i buduće eksperimentalne podatke.

UVOD

U osnovi voljnog pokreta čoveka leži fenomen kontrakcije njegove skeletne muskulature. Ona predstavlja motor čovečijeg aparata za kretanje, prirodni preduslov ljudskog rada. Mišićna kontrakcija je pojam anatomsko-fiziološko-biohemijsko-psihološke prirode. To je kompleksan prirodni mehanizam koji mora da bude u centru pažnje kinezioloških istraživanja.

Mi ćemo fenomen mišićne kontrakcije pokušati da predstavimo kibernetskim modelom »crne kutije«, kako bi uveli jedan metodološki novi pristup u proučavanje ovog, koliko značajnog, toliko i složenog problema. Posmatraćemo mehanizam mišićne kontrakcije sa tri različita aspekta teorijske fizike, kako bismo dobili što potpuniju sliku ovog prirodnog fenomena. Smatramo da ovakav pristup ima svoje logičko opravdanje, jer poznato je da sasvim različiti fizički procesi mogu biti opisani identičnim diferencijalnim jednačinama (matematička analogija prirodnih procesa). A kada jednom postoji adekvatan matematički model, onda je stvorena baza za eksperimentalna istraživanja, kao i mogućnost za optimalno upravljanje procesom koji je opisan datim modelom.

Na osnovu dosadašnjih fiziološko-biohemijskih istraživanja, zaključujemo da faktori koji proizvode kontrakciju mišićnog vlakna mogu biti vektorske ili tenzorske veličine: mehaničke, elastično-plastične i/ili elektromagnetne prirode. Zbog toga ćemo izvesti tri odvojena modela mehanizma kontrakcije skeletnog mišića, pri čemu naglašavamo da postoji mogućnost njihove sinteze, ukoliko bi to zahtevali eksperimentalni podaci.

U metodologiji prirodnih nauka je poznato da se neki realni proces u prirodi može tumačiti na dva načina:

1. »skrivenim mehanizmom«, kao što čine fizikalne teorije, i

2. logičkim izvodom, kako se to radi u matematičkim teorijama.

Mi ćemo pokušati da u opisivanju i analiziranju fenomena mišićne kontrakcije koristimo oba naznačena metoda.

Jednačine mogućih fizičkih procesa mišićne kontrakcije daćemo u najopštijem, tenzorskom obliku. Za upotrebu ovog složenog matematičkog aparata odlučili smo se iz dva razloga: s jedne strane, da bi dobili što realniju sliku ovog kompleksnog prirodnog mehanizma, i s druge, da bi ostavili dovoljno prostora za buduće eksperimentalne podatke koje treba ugraditi u ovako postavljen teorijski model.

MODEL MIŠIĆNE KONTRAKCIJE SA STANOVIŠTA MEHANIKE KRUTOG TELA

Upravni pogled na dvostruku kristalnu rešetku mišićnog vlakna sastavljenu od aktinskih i miozinskih niti, govori nam da suštinu mišićne kontrakcije predstavlja kretanje jednog dinamičkog sistema u odnosu na drugi. Ako sistem miozinskih niti uzmemo za pokretni sistem referencije, onda se analiza mišićne kontrakcije identifikuje sa analizom kretanja sistema aktinskih niti u odnosu na miozinske.

Neka je konfiguracija aktinskog sistema u odnosu na neki inercijalni sistem referencije u bilo kom trenutku vremena data skupom krivolinijskih koordinata $(q^1, q^2, \ldots, q^N)$, gde je N broj stepeni slobode sistema, što ćemo kratko obeležiti sa q^r. Ako se menjaju vrednosti koordinata, naš dinamički sistem menja konfiguraciju.

Neka je x^r drugi skup koordinata aktinskog sistema u odnosu na pokretni — miozinski sistem referencije, koje ćemo smatrati pravolinijskim. Tada je transformacija prvog sistema koordinata u drugi data jednačinom:

$$x^r = x^r(q^1, q^2, \ldots q^N), \qquad r = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

pod pretpostavkom da je aktinski sistem podvrgnut konačnim (geometrijskim) vezama koje ne zavise eksplicitno od vremena — koje su skleronomne.

Diferencirajući gornju relaciju po vremenu dobijamo izraz:

$$\dot{x}^r = \frac{\partial x^r}{\partial q^s} \dot{q}^s, \tag{2}$$

gde tačka iznad određene veličine označava njen izvod po vremenu. Veličine q^r koje predstavljaju komponente kontravarijantnog vektora u odnosu na transformaciju koordinata (1), zvaćemo vektor generalisane brzine. Iz jednačine (2) vidimo da ako je poznat vektor generalisane brzine, onda je određena brzina svake niti aktinskog sistema.

Neka veličina g_{mn} pretstavlja simetričnį kovarijantni tenzor drugog reda — metrički tenzor naših krivolinijskih koordinata, koji definiše metriku aktinskog prostora. Tada je kinetička energija aktinskog sistema data sa:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} M_{(\alpha)} g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} M_{(\alpha)} g_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial q^r} \frac{\partial x^n}{\partial q^s} \cdot \dot{q}^r \dot{q}^s, \tag{3}$$

gde je M_L masa pojedinačne aktinske niti.

Ako stavimo:

$$a_{rs} = \sum_{\alpha=1}^{N} M_{(\alpha)} g_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial q^r} \frac{\partial x^n}{\partial q^s}, \tag{4}$$

dobijamo kompaktan izraz za kinetičku energiju u obliku:

$$T = \frac{1}{2} s_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s, \tag{5}$$

dakle, kinetička energija aktinskog sistema je homogena kvadratna forma vektora generalisanih brzina aktinskih niti u odnosu na miozinske. Iz relacije (4) vidimo da je a_{rs} simetrički dvaput kovarijantni tenzor čije su komponente funkcije generalisanih koordinata aktinskog sistema q^r.

Ako je X^m_L kompletan vektor sile koji deluje na aktinsku nit mase M_L, onda je na osnovu Drugog Njutnovog zakona, jednačina kretanja te niti:

$$M_{(\alpha)} \ddot{x}^m_{(\alpha)} = X^m_{(\alpha)}. \tag{6}$$

Dalje, ako je δx^m virtuelno pomeranje saopšteno ovoj aktinskoj niti, dobijamo relaciju:

$$\{M_{(\alpha)} \ddot{x}^m_{(\alpha)} - X^m_{(\alpha)}\} \delta x_{(\alpha)m} = 0, \tag{7}$$

gde je $\delta x_{(L)m}$ pridruženi vektor $g_{ml} \delta x^l$.
Sumiranjem gornje jednačine za sve niti aktinskog sistema, dobijamo jednačinu kretanja aktinskog sistema u pravolinijskim koordinatama x^r:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \{M_{(\alpha)} \ddot{x}^m_{(\alpha)} - X^m_{(\alpha)}\} \delta x_{(\alpha)m}, \tag{8}$$

odnosno, korišćenjem metričkog tenzora i uprošćavanjem gornjeg izraza:

$$\sum g_{mn} (M\ddot{x}^m - X^m) \delta x^n = 0, \tag{9}$$

gde je δx^r virtuelno pomeranje aktinskog sistema, a u izrazu za X^r možemo zanemariti sve spoljašnje i unutrašnje sile koje deluju na ovom pomeranju. Ako damo sistemu virtuelno pomeranje podnošljivo za veze sistema, vidimo da ono može da se manifestuje dodavanjem priraštaja δq^r koji su povezani sa δx^r pomoću formula:

$$\delta x^r = \frac{\partial x^r}{\partial q^s} \delta q^s. \tag{10}$$

Dakle, jednačina kretanja aktinskog sistema u odnosu na miozinski postaje:

$$\sum g_{mn} \left\{ M \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^m}{\partial q^s} \dot{q}^s \right) \frac{\partial x^n}{\partial q^r} - X^m \frac{\partial x^n}{\partial q^r} \right\} \delta q^r = 0. \tag{11}$$

Dalje imamo:

$$\sum M g_{mn} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^m}{\partial q^s} \dot{q}^s \right) \frac{\partial x^n}{\partial q^r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r}. \tag{12}$$

Takođe, ako stavimo:

$$Q_r = \sum g_{mn} X^m \frac{\partial x^n}{\partial q^r}, \tag{13}$$

dobijamo:

$$Q_r \delta q^r = \sum g_{mn} X^m \delta x^n = \delta w, \tag{14}$$

gde je δW rad koji vrše spoljašne sile aktomiozinskog kompleksa na virtuelnom pomeranju δq^r, što pokazuje da je Q_r kovarijantni vektor. Zvaćemo ga vektor generalisane sile mišićne kontrakcije.

Jednačina (11) sad dobija oblik:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{T}{\dot{q}^r} - \frac{T}{q^r} - Q_r \right\} \delta q^r = 0. \tag{15}$$

a kako su koordinate q^r nezavisne, ova jednačina je tačna za sve varijacije δq^r, pa jednačine kretanja aktinskog sistema u odnosu na miozinski dobijaju poznati Lagranžev oblik:

$$\frac{d}{dt} \frac{T}{\dot{q}^r} - \frac{T}{q^r} = Q^r. \tag{16}$$

Međutim, kako je:

$$\frac{d}{dt} \frac{T}{\dot{q}^r} - \frac{T}{q^r} = a_{rs} q^s + [st, r] \dot{q}^s \dot{q}^t, \tag{17}$$

gde je $[st,r]$ Kristofelov simbol prve vrste. Dalje, primenom Kristofelovog simbola druge vrste na recipročni tenzor a^{rs}, dobijamo:

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ s\ t \end{matrix} \right\} = a^{rp} [st, p], \tag{18}$$

a odavde konačno sledi eksplicitni oblik Lagranževih jednačina kretanja našeg aktinskog sistema u odnosu na miozinski, odnosno jednačina mišićne kontrakcije u najopštijem obliku:

$$\ddot{q}^r + \begin{Bmatrix} r \\ s\ t \end{Bmatrix} \dot{q}^s \dot{q}^t = Q^r. \qquad (19)$$

Dakle, primenom Drugog Njutnovog zakona koji kaže: »Promena kretanja tela proporcionalna je sili koja dejstvuje na to telo i vrši se u pravcu sile«, Dalamberovog principa koji tvrdi: »Rad izgubljenih sila materijalnog sistema na virtuelnim pomeranjima jednak je nuli« i Lagranževih jednačina kretanja, došli smo do modela mišićne kontrakcije sa stanovištá mehanike krutog tela.

MODEL MIŠIĆNE KONTRAKCIJE SA STANOVIŠTA MEHANIKE DEFORMABILNOG TELA

1. *Deformacija mišićnog vlakna*

Mišićno vlakno ćemo posmatrati kao deformabilno telo čije su tačke povezane sa unapred određenim krivolinijskim koordinatnim sistemom q^r. Ako se svaka tačka mišićnog vlakna neznatno pomeri tako da zauzme mesto u sopstvenoj okolini, kažemo da je vlakno dobilo infinitezimalnu deformaciju.

Neka je P_0 tačka mišićnog vlakna u nedeformisanom prostoru i neka je P njena nova pozicija. Kako je deformacija mala, pomeranje P_0P je infinitezimalno. Označićemo ovaj mali vektor sa $x_0{}^r$, a zvaćemo ga vektor pomeranja proizvoljne tačke mišićnog vlakna. Prema tome, kada postoji deformacija, onda je definisan infinitezimalni vektor pomeranja u svakoj tački vlakna.

Ako su q^r i $q_0{}^r$ koordinate tačaka P i P_0 respektivno, onda su komponente vektora pomeranja date izrazom:

$$q^r - q^r_0 = x^r (q^1_0, q^2_0, q^3_0), \qquad (1)$$

a x^r je infinitezimala prvog reda. Mi želimo da ispitamo kako se deformisala okolina tačke P_0. Neka je Q_0 susedna tačka vlakna, a Q njena deformisana pozicija. Ako mali vektor P_0Q_0 označimo sa $y_0{}^r$, a njegov deformisani vektor sa y^r, onda vidimo da su koordinate od Q i Q_0 respektivno jednake $q^r + y^r$ i $q_0{}^r + y_0{}^r$. Takođe vektor Q_0Q ima vrednost x^r u tački Q_0, pa je prema tome:

$$(q^r + y^r) - (q^r_0 + y^r_0) = x^r (q^1_0 + y^1_0, q^2_0 + y^2_0, q^3_0 + y^3_0) = \\ = x^r + \left(\frac{\partial x^r}{\partial q^s}\right)_0 y^s_0, \qquad (2)$$

gde zanemarujemo stepene od $y_0{}^r$ reda većeg od jedan. Koristeći relaciju (1) dobijamo:

$$y^r - y^r_0 = \left(\frac{\partial x^r}{\partial q^s}\right)_0 y^s. \qquad (3)$$

Da bismo dobili odgovarajuće relacije u generalisanim koordinatama, uvodimo kovarijantni izvod vektora x^r:

$$x^r_{,s} = \frac{\partial x^r}{\partial x^s} + \begin{Bmatrix} r \\ s\ t \end{Bmatrix} x^t. \qquad (4)$$

Sada jednačina (3) dobija oblik:

$$y^r - y^r_0 = \delta y^r = (x^r_{,s})_0\, y^s, \qquad (5)$$

a to je tenzorska jednačina, tačna u svakom koordinatnom sistemu. Vektor δy^r prdstavlja meru deformacije mišićnog vlakna u kontrakciji.

Pridruženi tenzor $x_{r,s} = g_{rt} x^t{}_{,s}$ nije u opštem slučaju simetričan. Ako stavimo:

$$e_{rs} = \frac{1}{2}(x_{r,s} + x_{s,r}), \qquad w_{rs} = \frac{1}{2}(x_{r,s} - x_{s,r}), \qquad (6)$$

dobijamo da je:

$$x_{r,s} = e_{rs} + w_{rs}, \qquad (7)$$

ili podižući indeks r:

$$x^r_{,s} = e^r_{,s} + w^r_{,s}. \qquad (8)$$

Prema tome, relacija (5) postaje:

$$\delta y^r = e^r_{,s}\, y^s + w^r_{,s}\, y^s. \qquad (9)$$

Ako zanemarimo veličine reda većeg od x^r, vidimo da dve deformacije mišićnog vlakna:

$$\delta y^r = e^r_{,s}\, y^s \quad \text{i} \quad \delta y^r = w^r_{,s}\, y^s, \qquad (10)$$

kada se izvedu sukcesivno, imaju isti efekat na samo vlakno kao i relacija (9), a redosled u kojem se uzimaju nije od značaja. Za deformaciju e_{rs} kažemo da je čista deformacija (simetričan tenzor), dok w_{rs} predstavlja malu rotaciju okoline tačke P_0 oko sebe same. Dakle, deformacija vlakna prilikom mišićne kontrakcije sastoji se od:

a) čiste deformacije,

b) rotacije okoline neke tačke vlakna oko sebe same, i

c) translacije okoline neke tačke vlakna od prvobitnog do deformisanog položaja.

2. *Napon mišićnog vlakna u kontrakciji*

Sada pogledajmo sile koje deluju na delić mišićnog vlakna pri kontrakciji. Pre svega, mogu postojati spoljašnje sile koje dejstvuju na svaku tačku vlakna, i ako F^r označava vektor sile po jediničnoj masi vlakna, onda sila koja dejstvuje na element zapremine vlakna dV ima oblik $F^r R dV$, gde je R gustina mišićnog vlakna. Pored ovih spoljašnjih sila, mogu postojati i sile koje dejstvuju na unutarnju stranu površi vlakna, tako da na element površi dS deluje sila $T^r dS$. Jednu stranu elementa površi vlakna dS smatraćemo pozitivnom a drugu negativnom, a jedinični vektor normale na tu površ n^r crtaćemo na pozitivnoj strani. Tada je $T^r dS$ dejstvo materije sa pozitivne strane elementa površi vlakna na onu sa negativne, dok je $-T^r dS$ dejstvo sa suprotne strane. Dakle, vektor unutrašnje sile $T^r dS$ ne zavisi samo od elementa površi unutar vlakna, nego i od njegove orijentacije, odnosno od vektora n^r. Posmatrajući ravnotežu infinitezimalnog tetraedra vlakna može se pokazati da je vektor T^r linearna homogena funkcija vektora n^r, odnosno izraženo simbolički:

$$T^r = E^{rs} n_s, \qquad (11)$$

gde je E^{rs} dvostruki kontravarijantni tenzor koji zavisi samo od koordinata u tački. Unutrašnje sile mišićnog vlakna u njegovoj kontrakciji zvaćemo naponima, a veličinu E^{rs} tenzorom napona.

Potražimo sada jednačine kretanja proizvoljnog delića vlakna za vreme mišićne kontrakcije. Neka je zapremina (V) unutar vlakna odvojena pomoću površi (S) od okolnog dela materije. Jednačine kretanja ovog delića vlakna mogu se prikazati u obliku:

$$\iiint\limits_{(V)} R(F^r - f^r) l_r \, dV + \iint\limits_{(S)} T^r l_r \, dS = 0, \qquad (12)$$

gde je f^r vektor ubrzanja materije unutar vlakna, a l_r proizvoljno konstantno paralelno vektorsko polje prostora mišićnog vlakna.
Dalje, na osnovu relacije (11) imamo:

$$\iiint\limits_{(V)} R(F^r - f^r) l^r \, dV + \iint\limits_{(S)} E^{rs} n_s l_r \, dS = 0. \qquad (13)$$

Koristeći teoremu Ostrogradskog-Grina, dobijamo:

$$\iint\limits_{(V)} E^{rs} n_s l_r \, dS = \iiint\limits_{(V)} (E^{rs} l_r)_{,s} \, dV = \iiint\limits_{(V)} E^{rs}_{..,s} l_r \, dV, \qquad (14)$$

pošto je $l_{rs} = 0$. Dakle, konačno dobijamo izraz:

$$\iiint\limits_{(V)} \{R(F^r - f^r) + E^{rs}_{..,s}\} l_r \, dV = 0, \qquad (15)$$

i ova jednačina važi u svakoj zapremini (V) vlakna i za svako paralelno vektorsko polje I_r prostora vlakna. Prema tome, u svakoj tački mišićnog vlakna važiće relacija:

$$E^{rs}_{..,s} + RF^r = Rf^r, \qquad (16)$$

koja predstavlja tenzorsku jednačinu mišićne kontrakcije.

3. *Elastična i viskozna svojstva mišićnog vlakna*

Napon u mišićnom vlaknu zavisi od deformacije koja postoji u njemu i gubi se kada deformacija nestaje. Drugim rečima, tenzor napona je funkcija tenzora deformacije. Šta više, Hukov zakon kaže da je napon linearna homogena funkcija deformacije, što se simbolički prikazuje sa:

$$E_{rs} = c^{mn}_{rs} e_{mn}, \qquad (17)$$

gde su c_i funkcije koordinata u datoj tački vlakna. One se zovu koeficjenti elastičnosti mišićnog vlakna i vidimo da sačinjavaju mešoviti tenzor četvrtog reda — tenzor elastičnosti vlakna, simetričan i po gornjim i po donjim indeksima.

Ako sada u našu tenzorsku jednačinu mišićne kontrakcije (16) uključimo i Hukov zakon, dobijamo:

$$g^{st}(c^{mn}_{rs} e_{mn})_{,t} + RF^r = R\frac{\partial^2 x_r}{\partial t^2}, \qquad (18)$$

gde smo aproksimativno uzeli da je vektor ubrzanja r-te tačke vlakna određen sa:

$$f_r = \frac{\partial^2 x_r}{\partial t^2}.$$

Tako smo dobili tenzorsku jednačinu mišićne kontrakcije u kojoj eksplicitno učestvuju elastična svojstva mišićnog vlakna.

Mišićno vlakno možemo posmatrati i kao viskozni fluid. Uvešćemo pojam pritiska relacijom:

$$p = -\frac{1}{3} g^{mn} E_{mn}, \qquad (19)$$

pa na osnovu uloge deformacije u dinamici viskoznih fluida, dobijamo izraz:

$$E_{rs} + p g_{rs} = B_{rs}, \qquad (20)$$

a veličinu B_{rs} ćemo zvati tenzorom viskoznosti mišićnog vlakna. Sada tenzorska jednačina mišićne kontrakcije dobija oblik:

$$-\frac{\partial p}{\partial q^r} + g^{st} B_{rs,t} + R F_r = R f_r. \qquad (21)$$

Deformacija mišićnog vlakna u vremenu dt određena je vektorom pomeranja $x^r = v^r dt$, pa su, prema tome, komponente deformacije date sa:

$$e_{rs} = \frac{1}{2}(v_{r,s} + v_{s,r})\, dt. \qquad (22)$$

Nazovimo veličinu $d_{rs} = \dfrac{e_{rs}}{dt}$ tenzorom brzine deformacije vlakna. Vidimo da je on određen relacijom:

$$d_{rs} = \frac{1}{2}(v_{r,s} + v_{s,r}). \qquad (23)$$

Analongo zavisnosti između deformacije i napona u Hukovom zakonu o elastičnosti mišićnog vlakna, postoji i zavisnost između viskoznosti mišićnog vlakna i brzine njegove deformacije. Drugim rječima, tenzor viskoznosti vlakna je linearna i homogena funkcija tenzora brzine deformacije vlakna, što se simbolički predstavlja izrazom:

$$B^{rs} = k^{mn}_{rs} d_{mn}. \qquad (24)$$

Veličine k_{rs}^{mn} predstavljaju mešoviti tenzor četvrtog reda, simetričan i po subskriptima i po superskriptima, a zvaćemo ih koeficijentima viskoznosti. Prema tome, imamo:

$$B^{rs} = k^{mn}_{rs} v_{m,n}, \qquad (25)$$

gde je v^r vektor brzine kretanja r-te tačke vlakna. Odavde dobijamo tenzorsku jednačinu mišićne kontrakcije u kojoj eksplicitno figurišu viskozna svojstva mišićnog vlakna:

$$-\frac{\partial p}{\partial q^r} + g^{st}(k^{mn}_{rs} v_{m,n})_{,t} + R F_r = R f_r. \qquad (26)$$

Dakle, korišćenjem zakona mehanike deformabilnog tela (kontinuuma) došli smo do takvih karakteristika mišićnog vlakna kao što su deformacija, napon, elastičnost i viskoznost, koje su međusobno povezane u tenzorskim jednačinama mišićne kontrakcije.

MODEL MIŠIĆNE KONTRAKCIJE SA STANOVIŠTA ELEKTROMAGNETNE TEORIJE

1. *Mišićno vlakno kao dielektrik*

Mišićno vlakno možemo posmatrati i kao materijalnu sredinu u kojoj postoji određeni broj tačkastih naelektrisanja. Ovo električno polje određeno je sa dva vektora:

1. Vektor električne sile E_r koji predstavlja negativni gradijent potencijalne funkcije V, odnosno u generalisanim koordinatama q^r ima oblik:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial q^r} = -V_r, \qquad (1)$$

pri čemu je potencijal V u diskretnoj raspodjeli naelektrisanja jednak:

$$V = \frac{1}{4\pi}\sum \frac{e}{r}, \qquad (2)$$

a u neprekidnoj raspodeli naelektrisanja:

$$V = \frac{1}{4\pi}\iiint_{(V)} \frac{R\,dV}{r} + \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} \frac{M\,ds}{r}, \qquad (3)$$

gde su R i M zapreminska, odnosno površinska raspodela naelektrisanja respektivno, a r predstavlja rastojanje od date tačke do naelektrisanja e.

2. Vektor pomeranja D_r čiji je fluks po bilo kojoj površi (S) unutar mišićnog vlakna jednak ukupnom naelektrisanju na toj površi (Gausova teorema), ili simbolički:

$$\iint_{(S)} E_r n^r dS \iiint_{(V)} R\,dV + \iint_{(\Sigma)} M\,dS, \qquad (4)$$

gde je (Σ) ma koja površ vlakna unutar (S) koja ima površinsku raspodelu naelektrisanja. Iz Grinove teoreme izvodimo:

$$\iiint_{(V)} (E^r_{,r} - R)\,dV - \iint_{(\Sigma)} \{(E_r n^r)_1 + (E_r n^r)_2 + M\}\,dS = 0, \qquad (5)$$

i ovaj rezultat je tačan za sve površi (S) unutar mišićnog vlakna. Prema tome, u svakoj tački vlakna važi relacija:

$$g^{rs}E_{r,s} = E^r_{,s} = R, \qquad (6)$$

a R je nula tamo gde naelektrisanje ne postoji. Šta više, na površi na kojoj je površinska raspodela naelektrisanja M imamo:

$$(E_r n^r)_1 + (E_r n^r)_2 + M = 0. \qquad (7)$$

Analogne relacije za vektor pomeranja u električnom polju mišićnog vlakna glase:

$$g^{rs}D_{r,s} = D^r_{,r} = R, \qquad (8)$$

odnosno:

$$(D_r n^r)_1 + (D_r n^r)_2 + M = 0. \qquad (9)$$

Između vektora električne sile vlakna i vektora pomeranja u njegovom električnom polju postoji linearna funkcionalna zavisnost oblika:

$$D_r = a^r_s E_s, \qquad (10)$$

gde su koeficijenti a^r_s funkcije koordinata koje čine mešoviti tenzor drugog reda. Zvaćemo ih dielektričkim tenzorom mišićnog vlakna.

2. *Elektromagnetne jednačine mišićnog vlakna u kontrakciji*

Dakle, mišićno vlakno smo posmatrali kao materijalnu sredinu u kojoj postoji određena količina naelektrisanja, dakle kao dielektrik. Međutim, mišično vlakno predstavlja u određenom smislu i sistem provodnika elektriciteta. Uzećemo da je električna struja u njemu predstavljena vektorom struje i^r.

Omov zakon kaže da je vektor struje linearna homogena funkcija vektora električne sile E_r, ili simbolički:

$$i^r = w^{rs} E_s, \qquad (11)$$

gde su koeficijenti w^{rs} funkcije koordinata koje čine dvostruki kontravarijantni tenzor. Zvaćemo ga tenzor konduktivnosti (provodljivosti).

Dakle, mišićno vlakno posmatramo kao sredinu koja se sastoji iz dielektrika i sistema provodnika a u kojoj se kreće određeni broj naelektrisanja. Ovim je opisano jedno elektromagnetno polje koje je određeno sledećim vektorima:

1. Vektor električne sile mišićnog vlakna E_r.
2. Vektor pomeranja u električnom polju mišićnog vlakna D_r.
3. Vektor magnetne indukcije mišićnog vlakna B_r koji se definiše diferencijalnom jednačinom:

$$g^{mn} B_{m,n} = 0; \qquad (12)$$

4. Indukovani magnetizacioni vektor mišičnog vlakna I_r. Poslednja dva vektora definišu amgnetno polje mišićnog vlakna vektorom magnetne sile: $H_r = B_r - I_r$.

5. Vektor ukupne struje vlakna C^r. Ovaj vektor sadrži tri različita tipa vektora struje:

a) kondukcioni vektor struje vlakna koji je povezan sa vektorom električne sile vlakna Omovim zakonom. Dakle, kondukcioni vektor struje je jednak $w^{rs}E_s$, gde je w^{rs} tenzor konduktivnosti vlakna;

b) vektor pomeranja struje vlakna određen sa

$$\frac{\partial D^r}{\partial t};$$

c) konvekcioni vektor struje koji odgovara kretanju naelektrisanja u vlaknu. Dakle, ako naelektrisanje zapreminske gustine vlakna R ima brzinu v^r, onda je konvekcioni vektor struje jednak Rv^r.

Kako mišićno vlakno posmatramo kao sistem provodnika, odnosno električnu mrežu, za njega će važiti osnovni zakon elektromagnetizma, Faradejev zakon, koji kaže da je elektromotorna sila indukovana u kolu proporcionalna brzini smanjivanja fluksa magnetne indukcije u kolu. Elektromotorna sila u kolu (1) meri se konturnim integralom:

$$\int_{(l)} E_r \frac{dq^r}{dl} dl,$$

uzetim duž kola. Dakle, Faradejev zakon glasi:

$$\int_{(l)} E_r \frac{dq^r}{dl} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{(S)} B_r n^r dS, \tag{13}$$

gde je (S) površ koja prolazi kroz (1). Primenjujući Štokesovu teoremu na gornji konturni integral, dobijamo:

$$\iint_{(S)} \frac{1}{c}\frac{B^r}{t} - \varepsilon^{rst} E_{s,t}\, n_r dS = 0. \tag{14}$$

Ova jednačina je tačna za sve površi (S) unutar mišićnog vlakna, pa iz nje sledi jednakost:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B^r}{\partial t} = \varepsilon^{rst} E_{s,t}, \tag{15}$$

ili rečima, brzina promene vektora magnetne indukcije B_r jednaka je negativnom proizvodu konstante c i rotora električne sile vlakna E_r. Ovo je prva elektromagnetna jednačina mišićne kontrakcije.

Drugi osnovni zakon elektromagnetizma je Amperov zakon koji kaže da je integral magnetne sile po zatvorenom kolu proporcionalan fluksu struje u kolu, simbolički:

$$\int_{(l)} H_r \frac{dq^r}{dl} dl = \frac{1}{c}\iint_{(S)} C^r n_r\, dS. \tag{16}$$

Kada se na gornji izraz primeni Štokesova teorema, dobijamo:

$$\frac{1}{c} C^r = -\varepsilon^{rst} H_{s,t}, \tag{17}$$

dakle, vektor struje vlakna jednak je proizvodu konstante c i rotora magnetne sile vlakna H_r. Ovo je druga elektromagnetna jednačina mišićne kontrakcije.

Gornjim dvema vektorskim jednačinama elektromagnetnog polja — mišićnog vlakna u kontrakciji dodaćemo i dve invarijante jednačine:

$$g^{mn} D_{m,n} = R, \qquad g^{mn} B_{m,n} = 0. \tag{18}$$

koje definišu vektor pomeranja u električnom polju mišićnog vlakna D_r i vektor magnetne indukcije mišićnog vlakna B_r. Ovo su treća i četvrta elektromagnetna jednačina mišićne kontrakcije respektivno. Inače, u elektromagnetnoj teoriji ove jednačine se zovu Maksvelove.

Dakle, na osnovu Omovog, Faradejevog i Amperovog zakona, izveli smo Maksvelove diferencijalne jednačine, kao model mišićne kontrakcije sa stanovišta elektromagnetne teorije.

ZAKLJUČAK

Pokušali smo, dakle, da izvršimo teorijsko modeliranje fenomena mišićne kontrakcije na osnovu fundamentalnih fizičkih zakona. U tu svrhu koristili smo tri različite oblasti teorijske fizike: mehaniku krutog tela, mehaniku deformabilnog tela i elektromagnetnu teoriju. Na osnovu dosadašnjih fiziološko-biohemijskih istraživanja mišićne kontrakcije i na njima zasnovanih teorija (npr. »teorija letve sa zapinjačem«), može se zaključiti da postoje elementi na kojima se može zasnivati svaki od ova tri teorijska modela. Najverovatnije je, međutim, da bi realnu kompleksnost ovog prirodnog fenomena adekvatnije ocrtavala sinteza ovih modela, svakako bazirana na konkretnim eksperimentalnim podacima. Jer poznato je, iz teorije vektorskih i tenzorskih polja, da se u jednom zatvorenom prostorno-vremenskom kontinuumu mogu nalaziti tri različita fizička polja (odnosno proizvoljan broj takvih polja). Prema tome, naš sledeći zadatak bio bi pokušaj da se izvrši sinteza datih teorijskih modela, naravno pod uslovom da se dopuni i proširi banka postojećih eksperimentalnih podataka.

Što se tiče samog teorijskog modela mišićne kontrakcije, želeli smo da bude dovoljno širok i elastičan da može da prihvati sve postojeće i buduće eksperimentalne rezultate, i s druge strane, dovoljno čvrsto vezan za fundamentalne zakone fizike, da bi mogao da bude baza buduće egzaktne — deduktivne analize mišićne kontrakcije. Koliko smo u ovim nastojanjima uspeli, pokazaće buduća istraživanja.

LITERATURA

1. Anđelić, T.: Tenzorski račun. Naučna knjiga, Beograd, 1967.
2. Anđelić, T.: Osnovi mehanike neprekidnih sredina. Naučna knjiga, Beograd, 1950.
3. Anđelić, T., R. Stojanović,: Racionalna mehanika. Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1966.
4. Arronet, N. I.: Mišečnie i kletočnie sokratiteljnie modeli. Nauka, Moskva, 1971.
5. Ashby, W. R.: An Introduction to Cybernetic. Chapman and Hall, New York, 1956.
6. Bljomenfeld, L. A.: Problemi biologičeskoj fiziki. Nauka Moskva, 1974.
7 Bourne, G. H.: Structure and Function of Muscle. Vol. I, II, III. Academic Press, New York, 1960.

8. Deščerevskii, V. I.: Matematičeskie modeli mjišečnogo sokraščenija. Nauka, Moskva, 1977.
9. Deščerevskii, V. I.: Mehanizmi mišečnogo sokraščenija. Nauka, Moskva, 1971.
10. DeVries, H. A.: Physiology of Exercise for Physical Education and Athletics. W. C. B. Pub. Co., California, 1974.
11. Guyton, A. G.: Medicyinska fiziologija. Medicinska knjiga, Beograd — Zagreb, 1976.
12. Hill, A. V.: The Design of Muscles. British Medical Bulletin, 12:165—66, 1976.
13. Hill, A. V.: The First and the Last Experiments in Muscle Mechanics. Cambridge University Press, London, 1970.
14. Ivanović, D.: Vektorska analiza. Naučna knjiga, Beograd, 1971.
15. Hughes, W. F., E. W., Gaylord: Basic Equations of Engineering Science. Schaum's Pub. Co., New York, 1964.
16. Korn, G., T., Korn: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw Hill Co., New York, 1961.
17. Landau, L., E., Lifšic: Teoretičeskaja fizika, tom I, II. Nauka, Moskva, 1973.
18. Mušicki, Đ.: Uvod u teorijsku fiziku I i II. ICS, Beograd, 1973.
19. Surutka, J.: Elektromagnetika. Građevinska knjiga, Beograd, 1978.

A THEORETICAL MODEL OF MUSCULAR CONTRACTION

The work is an attempt to arrive at a theoretical model of muscular contraction from three different physical aspects: the mechanics of solid bodies, the mechanics of deformable bodies and the theory of electromagnetism. On the basis of fundamental laws of physics were derived tensoric differential equations of muscular fibers as a model of the process of their contraction. The equations are given in the most general form in order to accommodate all existing and future experimental data.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЫШЕЧНОЙ КОНТРАКЦИИ

В работе сделана попытка теоретического моделирования мышечной контракции с трех различных точек зрения: с точки зрения механики твердого тела, механики мягкого тела и электромагнитной теории. На основании фундаментальных законов физики вычислены тензорные дифференциальные уравнения мышечного волокна как модель процесса его контракции. Уравнения приводятся в обобщенной форме, позволяющей их применение в настоящих и будущих экспериментах.