Hermiteov identitet i antje jednadžbe

Julije Jakšetić[1], *Josip Lopatič*[2], *Robert Soldo*[3]

Ovaj rad je nastavak članka objavljenog u Matematičko-fizičkom listu 2016./ 2017., 3. Tamo smo iskazali sljedeći teorem

Teorem 1 (Hermite). *Za svaki realan broj x i prirodan broj n vrijedi:*

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor,$$

i dali dva njegova dokaza, te niz zadataka u kojima se on koristi. Ovdje ćemo pokazati kako primjena Hermiteovog identiteta znatno pojednostavnjuje rješavanje antje jednadžbi koje se učestalo javljaju na raznim razinama matematičkih natjecanja.

Zadatak 1. *Riješite jednadžbu*

$$\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = 2.$$

Rješenje. Uvođenjem supstitucije $t = \dfrac{x}{10}$ jednadžba poprima oblik

$$\lfloor 2t \rfloor - \lfloor t \rfloor = 2.$$

Primjenom Hermiteovog identiteta za $n = 2$ dobivamo

$$\left\lfloor t + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2 \iff 2 \leqslant t + \frac{1}{2} < 3 \iff \frac{3}{2} \leqslant t < \frac{5}{2} \iff 15 \leqslant x < 25 \iff x \in [15, 25\rangle\,.$$

□

Zadatak 2. *Riješite jednadžbu*

$$11\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 9x.$$

(Županijsko natjecanje u Hrvatskoj 2015. godine, 3. razred, A – varijanta)

Rješenje. Po Hermiteovom identitetu: $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$, jednadžba glasi

$$10\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 9x.$$

1° Ako je $0 \leqslant \{x\} < \dfrac{1}{2}$, onda je $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ i jednadžba postaje $4\lfloor x \rfloor = 3x$ tj. $\lfloor x \rfloor = 3\{x\}$. Kako je $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \implies \{x\} \in \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\} \iff x \in \left\{0, \dfrac{4}{3}\right\}$.

[1] Izvanredni je profesor na Prehrambeno biotehnološkom fakultetu u Zagrebu; `julije@math.hr`

[2] Predavač je na VSPU u Zaprešiću; `josiplopatic@gmail.com`

[3] Autor je inženjer teorijske matematike zaposlen u tvrtki Agit; e-pošta: `robert.soldo@agit.hr`

2° Ako je $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$, onda je $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$, pa imamo $3\lfloor x \rfloor + 1 = 9\{x\}$ tj. $\lfloor x \rfloor = 3\{x\} - \frac{1}{3}$. Dakle, $3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \leqslant \lfloor x \rfloor < 3 \cdot 1 - \frac{1}{3} \iff \frac{7}{6} \leqslant \lfloor x \rfloor < \frac{8}{3} \iff \lfloor x \rfloor = 2 \implies \{x\} = \frac{7}{9} \implies x = \frac{25}{9}$.

Sve zajedno, rješenja su

$$x \in \left\{0, \frac{4}{3}, \frac{25}{9}\right\}.$$

□

Zadatak 3. *Riješite jednadžbu*

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = 2002.$$

(Matematička olimpijada u Moldaviji 2002. godine, 8. razred)

Rješenje. Razlikujemo tri slučaja:

1° Ako je $0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{2}$, onda je $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor$, pa jednadžba glasi

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = 2002.$$

Po Hermiteovom identitetu $\lfloor 3x \rfloor = 2002 \implies 2002 \leqslant 3x < 2003 \implies 667\frac{1}{3} \leqslant x < 667\frac{2}{3}$. Zbog gornjeg uvjeta, rješenje je

$$667\frac{1}{3} \leqslant x < 667\frac{1}{2}.$$

2° Ako je $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < \frac{2}{3}$, onda je $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + 1$ i jednadžba je

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = 2001 \iff \lfloor 3x \rfloor = 2001 \iff 667 \leqslant x < 667\frac{1}{3}.$$

Zbog početnog uvjeta vidimo da ovaj slučaj ne daje rješenja.

3° Ako je $\frac{2}{3} \leqslant \{x\} < 1$ tada je $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 = \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor$, pa analogno kao u prvom slučaju dobivamo: $667\frac{1}{3} \leqslant x < 667\frac{2}{3}$. Ali, zbog uvjeta i ovo rješenje otpada.

Dakle, rješenje zadane jednadžbe je

$$x \in \left[667\frac{1}{3}, 667\frac{1}{2}\right\rangle.$$

□

Zadatak 4. *Riješite jednadžbu*

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{8} \right\rfloor = 2.$$

(Matematička olimpijada u Rumunjskoj 2006. godine, 8. razred)

Rješenje. Zadanu jednadžbu napišemo u obliku

$$\left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2. \tag{1}$$

Na sva tri pribrojnika lijeve strane primijenimo Hermiteov identitet za $n = 2$ i skratimo:

$$\lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor = 2. \tag{2}$$

Iz (1) se vidi da za $x < 0$ nema rješenja.

Ako je $x \geqslant 0$ onda je $\left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, stoga je

$$\left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geqslant 3 \left\lfloor \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

pa iz (1) slijedi

$$\left\lfloor \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{2}{3} \implies \left\lfloor \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \implies \left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor = 0.$$

Sada iz (2) imamo $\lfloor x \rfloor = 2 \iff x \in [2, 3\rangle$. $\square$

Zadatak 5. *Riješite jednadžbu*

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x+5}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = \frac{3x+1}{2}.$$

(Matematička olimpijada u Rumunjskoj 2014. godine, 9. razred)

Rješenje. Zbog $\frac{2x+5}{12} = \frac{2x-1}{12} + \frac{1}{2}$, prema Hermiteovu identitetu za $n = 2$ vrijedi: $\left\lfloor \frac{2x-1}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x+5}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x-1}{6} \right\rfloor$. Analogno $\frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{6} + \frac{1}{2}$, čime se jednadžba, zbog tog identiteta, reducira na

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor = \frac{3x+1}{2}. \tag{3}$$

Iz (3) dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{2x-1}{3} - 1 < \frac{3x+1}{2} \leqslant \frac{2x-1}{3} \\ \iff & -\frac{11}{5} < x \leqslant -1 \\ \iff & -1.8 < \frac{2x-1}{3} \leqslant -1 \\ \iff & \left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor \in \{-2, -1\}. \end{aligned}$$

Dakle, $\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor = \frac{3x+1}{2} \in \{-2, -1\}$ tj.

$$x \in \left\{ -\frac{5}{3}, -1 \right\}.$$

$\square$

Zadatak 6. *Riješite jednadžbu*

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3}.$$

(Županijsko natjecanje 2012., 4. razred A – kategorija)

Rješenje. Kako je $\frac{4x+1}{6} = \frac{2x-1}{3} + \frac{1}{2}$ danu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-1}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3},$$

odakle, koristeći Hermiteov identitet za $n = 2$, imamo

$$\left\lfloor \frac{4x-2}{3} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3}. \tag{4}$$

Iz (4) slijedi

$$\begin{aligned} & \frac{4x-2}{3} - 1 < \frac{5x-4}{3} \leqslant \frac{4x-2}{3} \\ \iff & -1 < x \leqslant 2 \\ \iff & -2 < \frac{4x-2}{3} \leqslant 2 \\ \iff & \left\lfloor \frac{4x-2}{3} \right\rfloor \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Dakle, $\left\lfloor \frac{4x-2}{3} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ tj.

$$x \in \left\{ -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2 \right\}.$$

□

Zadatak 7. *Riješite jednadžbu*

$$\left\lfloor \frac{3x^2+1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2x^2+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3x^2+2}{3} \right\rfloor = 0.$$

Rješenje. Jednadžbu zapišemo u obliku

$$\left\lfloor x^2 + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x^2 + \frac{2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor x^2 + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Ako i lijevoj i desnoj strani dodamo pribrojnik $\lfloor x^2 \rfloor$ možemo primjeniti Hermiteov identitet za $n = 3$ odnosno $n = 2$:

$$\lfloor 3x^2 \rfloor = \lfloor 2x^2 \rfloor. \tag{5}$$

Iz (5) slijedi $x^2 = \{3x^2\} - \{2x^2\} < 1 \implies 2x^2 < 2 \implies \lfloor 2x^2 \rfloor \in \{0, 1\}$.

1° $\lfloor 3x^2 \rfloor = \lfloor 2x^2 \rfloor = 0 \implies 0 \leqslant x^2 < 1/3 \implies x \in \left\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$.

2° $\lfloor 3x^2 \rfloor = \lfloor 2x^2 \rfloor = 1 \implies \frac{1}{2} \leqslant x^2 < \frac{2}{3} \implies x \in \left\langle -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\rangle$.

Dakle, sva rješenja od (5), a onda i početne jednadžbe su

$$x \in \left\langle -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cup \left\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\rangle .$$

□

Zadatak 8. *Riješite jednadžbu*

$$\left\lfloor \frac{1}{1-x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4-x}{3(1-x)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5-2x}{3(1-x)} \right\rfloor = \frac{3}{1-\lfloor x \rfloor}.$$

(Gazeta matematica 2014/No 9, Subliment)

Rješenje. Napišimo jednadžbu u obliku

$$\left\lfloor \frac{1}{1-x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1-x} + \frac{2}{3} \right\rfloor = \frac{3}{1-\lfloor x \rfloor}.$$

Po Hermiteovom identitetu lijeva je strana za $n = 3$

$$\left\lfloor \frac{3}{1-x} \right\rfloor = \frac{3}{1-\lfloor x \rfloor}. \tag{6}$$

Iz (6) zaključujemo $1 - \lfloor x \rfloor \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Imamo četiri slučaja.

1° $1 - \lfloor x \rfloor = -3$, $\left\lfloor \frac{3}{1-x} \right\rfloor = -1 \implies x \in [4, 5\rangle$.

2° $1 - \lfloor x \rfloor = -1$, $\left\lfloor \frac{3}{1-x} \right\rfloor = -3 \implies x \in \left[2, \frac{5}{2}\right\rangle$.

3° $1 - \lfloor x \rfloor = 1$, $\left\lfloor \frac{3}{1-x} \right\rfloor = 3 \implies x \in \left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$.

4° $1 - \lfloor x \rfloor = 3$, $\left\lfloor \frac{3}{1-x} \right\rfloor = 1 \implies x \in [-2, -1\rangle$.

Sva rješenja jednadžbe su

$$x \in [-2, -1\rangle \cup \left[0, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \left[2, \frac{5}{2}\right\rangle \cup [4, 5\rangle .$$

□

Na kraju donosimo nekoliko zadataka za vježbu na ovu temu, a svi su se redom pojavljivali na raznim matematičkim natjecanjima.

Zadatci za vježbu

Riješite jednadžbe:

1. $\left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor = \left\{ \frac{2x-1}{3} \right\} + x$

Rezultat: $x \in \left\{ -\frac{17}{5}, -\frac{14}{5}, -\frac{11}{5}, -\frac{8}{5}, -1 \right\}$

2. $\left\lfloor\dfrac{2x+1}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{6x+8}{15}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{6x+13}{15}\right\rfloor=10$

Rezultat: $x\in\left[\dfrac{47}{6},\dfrac{26}{3}\right\rangle$

3. $\left\lfloor\dfrac{7\cdot\log_{2016}x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{1+7\cdot\log_{2016}x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{2+7\cdot\log_{2016}x}{3}\right\rfloor=5\cdot\log_{2016}x^2-3$

Rezultat: $x\in\left\{2016^{\frac{7}{10}},2016^{\frac{4}{5}},2016^{\frac{9}{10}},2016\right\}$

4. $\left\lfloor\dfrac{2x+1}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{10x+12}{35}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{10x+19}{35}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{10x+26}{35}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{10x+33}{35}\right\rfloor=x+2$

Rezultat: $x\in\{3,4,5\}$

5. $\left\lfloor\dfrac{5x-2}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{15x-2}{12}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{15x+2}{12}\right\rfloor=\dfrac{5x-3}{2}$

Rezultat: $x\in\left\{\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right\}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor}\left\lfloor\frac{4096+2^{k-1}}{2^k}\right\rfloor=4096$

Rezultat: $x\in[11,+\infty\rangle$

Literatura

[1] LUKA ČELIKOVIĆ, *Antje funkcija*, Beli Manastir, 1990.

[2] NEVEN ELEZOVIĆ, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Zagreb, 1992.

[3] Gazeta Matematică, Seria B, (razna godišta).

[4] CHARLES HERMITE, *Sur quelques conséquences arithmetiques des Formules de la théorie des fonctions*, Acta Math. 5 1884, no. 1, pp. 297–330.

[5] Matematičko fizički list, (razna godišta).

[6] Kömal, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, (razna godišta).