O prekrivanju i Hipokratovim mjesecima

Julije Jakšetić[1], *Josip Lopatič*[2], *Robert Soldo*[3]

Slava geometrije je da sa svega nekoliko svojstava,
izvedenih niotkud, daje toliko puno.
Sir Isaac Newton

U ovom radu prikazana je jedna tehnika iz elementarne geometrije, koja se često primjenjuje pri rješavanju problema na matematičkim natjecanjima. Na engleskom jeziku tehnika je nazvana *Carpets theorem* i među natjecateljima je naročito popularizirana knjigom [1].

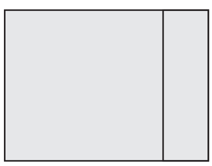
Motivirani gornjim Newtonovim citatom, krećemo od jednog očitog teorema, kojeg ćemo višetruko primjenjivati.

Teorem 1. *Ako se dva ravninska lika jednake površine preklapaju, onda preostali komadi likova, van preklapajućeg dijela, imaju jednake površine.*

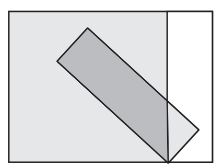
Dokaz. Ako je $P(A) = P(B)$ tada je

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B \setminus A). \qquad \square$$

Ilustrirajmo: Na pravokutnicima na slici 1 i slici 2 uočimo desni mali pravokutnik (traku).



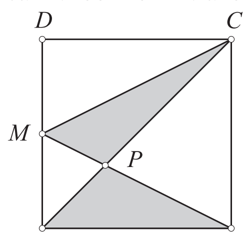
Slika 1.



Slika 2.

Tada je površina preklapajućeg dijela trake i pravokutnika jednaka površini nepokrivenog dijela pravokutnika (neosjenčani dio, slika 2).

Uočimo da ovdje nismo ograničeni oblikom lika koji se prekriva niti oblikom "trake" kojom prekrivamo lik.



Slika 3.

Zadatak 1.

Pokažite da dva osjenčana trokuta unutar kvadrata na slici 3 imaju jednake površine.

Rješenje. $P(\triangle ACM) = P(\triangle ABM)$, pa po teoremu 1 tvrdnja slijedi. $\square$

---

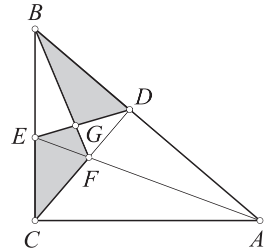
[1] Izvanredni je profesor na Prehrambeno biotehnološkom fakultetu u Zagrebu; `julije@math.hr`

[2] Predavač je na VSPU u Zaprešiću; `josiplopatic@gmail.com`

[3] Autor je inženjer teorijske matematike zaposlen u tvrtki Agit; e-pošta: `robert.soldo@agit.hr`

Zadatak 2.

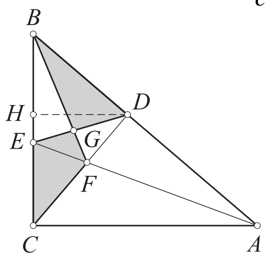
Neka je F točka presjeka visine $\overline{CD}$ i simetrale $\overline{AE}$ nutarnjeg kuta trokuta CAB ($\sphericalangle ACB = 90°$), te G točka presjeka dužina $\overline{ED}$ i $\overline{BF}$. Dokažite da su površine četverokuta $CFGE$ i trokuta BDG jednake.



Slika 4.

Rješenje. Dokažimo da je $P(\triangle CDE) = P(\triangle BFD)$.

Iz svojstva dijeljenja stranice a simetralom $\overline{AE}$ slijedi $|EC| = \dfrac{ab}{b+c}$. Zbog sličnosti pravokutnih trokuta DBH i ABC slijedi $|HD| = \dfrac{b}{c}|BD|$. Prema tome,



Slika 5.

$$P(\triangle CDE) = \frac{|EC| \cdot |HD|}{2} = \frac{ab^2}{2c(b+c)}|BD|.$$

$\overline{AF}$ je simetrala kuta A trokuta ADC, pa je

$$|FD| = \frac{|DA|}{|DA| + b}|CD|, \quad \triangle BCD \sim \triangle ABC \implies |CD| = \frac{ab}{c}.$$

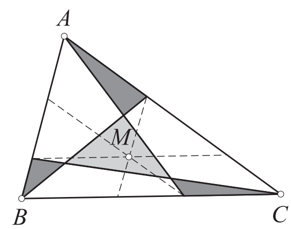
Također $\triangle ACD \sim \triangle ABC \implies |DA| = \dfrac{b^2}{c}$. Sada je

$$P(\triangle BFD) = \frac{|FD| \cdot |BD|}{2} = \frac{ab^2}{2c(b+c)}|BD|.$$

Zbog $P(\triangle CDE) = P(\triangle BFD)$ i teorema 1 slijedi tvrdnja. $\square$

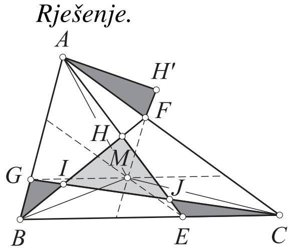
Zadatak 3.

Točkom M u unutrašnjosti trokuta ABC povučene su dužine paralalelne sa stranicama. Ostale dužine su povučene kao na slici. Dokažite da je suma površina tamnijih trokuta jednaka površini svjetlijeg trokuta.



Slika 6.

Rješenje.



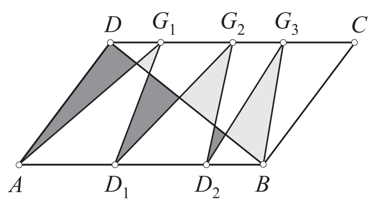
Slika 7.

Neka je H' osnosimetrična slika od H s obzirom na AC. Tada je $P(\triangle AHF) = P(\triangle AFH')$. Nadalje, uočimo da je $P(\triangle BFA) = P(\triangle BMA)$ i $P(\triangle AEC) = P(\triangle AMC)$ pa je $P(BFH'A \cup FHEC) = P(\triangle ABC) - P(\triangle BCM)$. S druge strane, također je, $P(\triangle GCA) = P(\triangle ABC) - P(\triangle BCM)$.

Dakle, likovi $BFH'A \cup FHEC$ i $\triangle GCA$ imaju jednake površine i preklapaju se na $\triangle GCA \setminus \triangle IJH$. Po teoremu 1 sada slijedi jednakost sume površina tamnijih trokuta i površine svjetlijeg trokuta. $\square$

Zadatak 4.

Zadan je paralelogram $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ su izabrane prozvoljne točke D_1, D_2, a na stranici $\overline{CD}$ proizvoljne točke G_1, G_2, G_3. Dokažite da je suma tamnijih dijelova jednaka sumi svjetlijih dijelova.

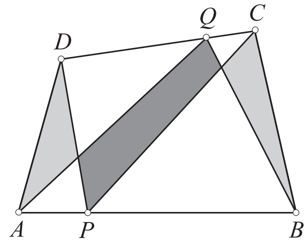


Slika 8.

Rješenje. Suma površina trokuta AD_1G_1, $D_1D_2G_2$, D_2BG_3 je jednaka polovini površine paralelograma. Kako je površina trokuta ABD također pola površine paralelograma, tvrdnja slijedi primjenom teorema 1. $\square$

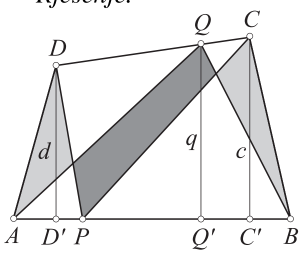
Zadatak 5.

Točke P i Q nalaze se na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ tako da je $\dfrac{|AP|}{|AB|} = \dfrac{|CQ|}{|CD|}$. Ostale dužine su povučene kao na slici. Dokažite da je suma površina svjetlijih dijelova jednaka površini tamnijeg dijela.



Slika 9.

Rješenje.



Slika 10.

Označimo $\lambda = \dfrac{|AP|}{|AB|} = \dfrac{|CQ|}{|CD|}$.

Tada je $q = \lambda d + (1-\lambda)c$. Računamo,

$$P(\triangle APD) = \frac{|AP|d}{2} = \frac{\lambda|AB|d}{2}$$

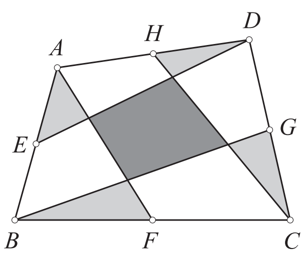
$$P(\triangle PBC) = \frac{|PB|c}{2} = \frac{(1-\lambda)|AB|c}{2}$$

$$P(\triangle ABQ) = \frac{|AB|q}{2}$$

$$\Longrightarrow P(\triangle ABQ) = P(\triangle APD) + P(\triangle PBC). \qquad \square$$

Zadatak 6.

Točke E, F, G, H su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, redom, konveksnog četverokuta $ABCD$. Ostale dužine su povučene kao na slici. Dokažite da je suma površina svjetlijih dijelova jednaka površini tamnijeg dijela.



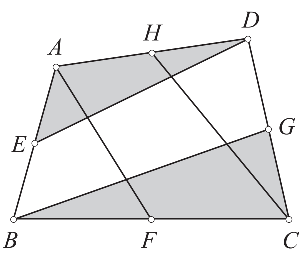
Slika 11.

Rješenje.

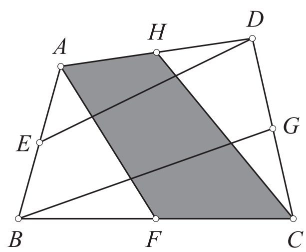
$$P(\triangle AED) = P(\triangle EBD), \quad P(\triangle BCG) = P(\triangle DBG)$$

$$\Longrightarrow P(\triangle AED \cup \triangle BCG) = P(EBGD) = \frac{P(ABCD)}{2}.$$

Slično, $P(FCHA) = \dfrac{P(ABCD)}{2}$. Sada tvrdnja slijedi primjenom teorema 1 na slike 12 i 13.



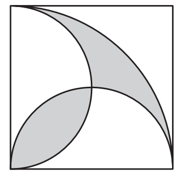
Slika 12.



Slika 13.

$\square$

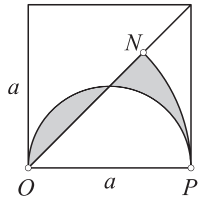
Zadatak 7.



Slika 14.

Dokažite da su dvije osjenčane površine, unutar kvadrata, jednake. Koliko iznose te površine?

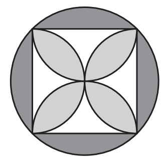
Rješenje.



Slika 15.

Polukrug nad dijametrom OP i osmina kruga, OPN, imaju jednake površine $\dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\pi}{2} = \dfrac{a^2\pi}{8}$. Po teoremu 1 izvan preklapajućeg dijela oni imaju jednake površine, osjenčane na slici. Odavde slijedi tvrdnja zadatka zbog simetrije s obzirom na dijagonalu kvadrata. $\square$

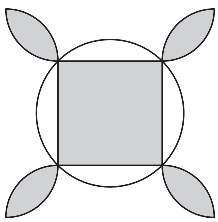
Zadatak 8.



Slika 16.

Dokažite da su površine svjetlijih latica i tamnije površine van kvadrata, a unutar kruga, jednake. Kolika je površina latica?

Rješenje.



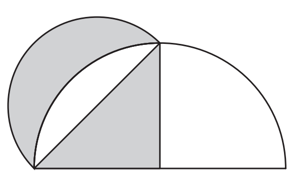
Slika 17.

Neka je a stranica kvadrata sa slike 16.
Četiri polukruga prekrivaju cijeli kvadrat i njihova ukupna suma površina je $4 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\pi}{2} = \dfrac{a^2\pi}{2}$. Ta površina je, ujedno i površina kruga opisanog oko kvadrata i osjenčanog lika sa slike 17 čije su latice dobivene centalnom simetrijom latica sa slike 16 s obzirom na vrhove kvadrata. Sada jednakost površina slijedi iz teorema 1.

Površina latica sada trivijalno slijedi, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\pi - a^2 = a^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$. $\square$

⋆ ⋆ ⋆

Do sada smo napravili primjere jednakih površina za ravninske likove koji su istog ili sličnog tipa (trokut-trokut, trokut-četverokut, kružni odsječak-kružni odsječak). **Hipokrat** s Hiosa (470.–410. p. n. e.), grčki filozof i matematičar, prvi je pokazao sljedeću zanimljivu činjenicu: osjenčane površine sa slike 18 su jednake, tj. površina lunete (mjeseca) je jednaka površini trokuta. Taj i slični rezultati, opisani u nastavku članka u početku su navodili matematičare na misao da bi se na sličan način mogla napraviti kvadratura kruga.

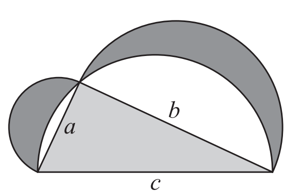


Slika 18.

Hipokratov rezultat je jednostavna posljedica teorema 1: četvrt kruga radijusa r i polovina kruga radijusa $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ imaju jednake površine, a preklapaju se na kružnom odsječku.

Zadatak 9.

Pravokutnom trokutu opisana je polukružnica. Ako se nad njegovim katetama kao promjerima opišu polukružnice prema van, dobivamo dva polumjeseca. Dokažite da je zbroj površina tih polumjeseca jednak površini trokuta.



Slika 19.

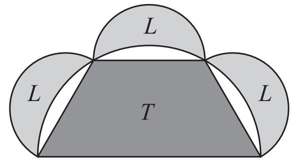
Rješenje. Dva polukruga nad katetama imaju površinu

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi=\frac{a^2+b^2}{8}\pi=\frac{c^2\pi}{8}$$

što je površina polukruga nad hipotenuzom c. Preklapajući dio su kružni, neobojani, odsječci. Sada tvrdnja slijedi primjenom teorema 1. □

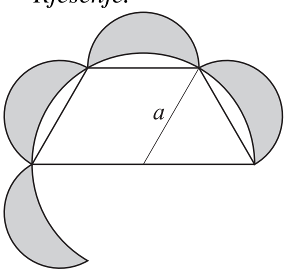
Zadatak 10.

Pokažite da je $S+3L=T$, gdje je S površina polukruga nad gornjom osnovicom trapeza kao dijametrom.



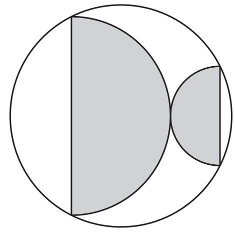
Slika 20.

Rješenje.



Slika 21.

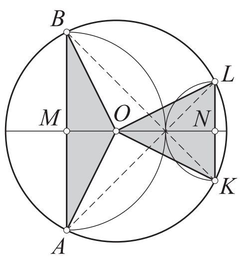
Uočimo četiri manja siva polukruga čija je suma površina jednaka $\frac{a^2\pi}{2}$, što je jednako površini velikog polukruga radijusa a. Tri manja polukruga se preklapaju s velikim polukrugom na kružnim odsječcima, pa tvrdnja zadatka slijedi primjenom teorema 1. □


Slika 22.

Zadatak 11.

Dokažite da je suma površina dva manja polukruga jednaka polovici površine velikog kruga.

Rješenje.



Slika 23.

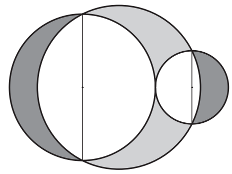
$\sphericalangle ABK=\sphericalangle LAB=45^\circ$
pa je $\sphericalangle AOK=\sphericalangle LOB=90^\circ$ (obodni i središnji kut) iz čega zaključujemo da su trokuti BMO i ONL sukladni. Dakle, $|MO|=|LN|=R_2$ (radijus manjeg polukruga) i $|BM|=|ON|=R_1$, (radijus većeg polukruga), pa je po Pitagorinom poučku

$$R_1^2+R_2^2=R_C^2,$$

gdje je R_C radijus velikog polukruga, iz čega slijedi tvrdnja zadatka. □

Zadatak 12.

Dokažite da je suma tamnijih površina na slici 24 jednaka sumi svjetlije sivih površina.

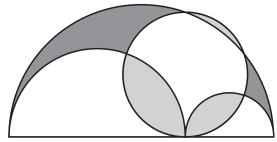

Slika 24.

Rješenje. Suma površina dva manja kruga je jednaka površini većeg kruga (prethodni zadatak) pa tvrdnja slijedi po teoremu 1. □

Zadatak 13.

Dokažite da je suma tamnijih površina na slici 25 jednaka sumi površina svjetlije sivih dijelova.

Rješenje. Površina velikog polukruga minus površine upisana dva manja polukruga je jednaka površini kruga kojem je radijus geometrijska sredina radijusa upisanih polukrugova. Odavde slijedi tvrdnja. □



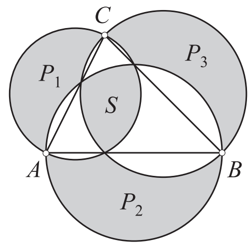
Slika 25.

Na koncu dajemo dva zadatka za samostalno rješavanje.

Zadatak 14.

Dokažite:

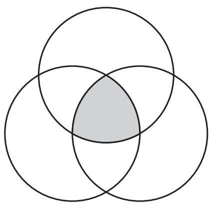
$$P_1 + P_2 + P_3 - S = 2P(\triangle ABC).$$



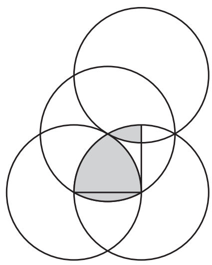
Slika 26.

Zadatak 15.

Što je veće, četvrt kruga ili siva površina?



Slika 27.



Slika 28.

□

Literatura

[1] T. Andreescu, B. Enescu, *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser, 2003.

[2] V. N. Berezin, *Lunočki Hippokrata*, KVANT, 5 (1971), 17–22.

[3] B. Dakić, *Hipokratove lunule*, Matematika i škola, 61 (2011), 17–22.

[4] B. Dakić, *Matematika u boji – dokazi bez riječi*, Element, 2018.

[5] T. gabron, *Hipokratove lunule*, Matka, 15 (1996), 114–117.