Aritmetičko-geometrijska sredina i njena primjena na računanje broja π

Tomislav Burić[1], *Stjepan Meštrović*[2]

Uvod

U ovom članku opisat ćemo aritmetičko-geometrijsku sredinu i neka njena svojstva. Ona nalazi primjenu u izračunu raznih konstanti i vrijednosti funkcija, a mi ćemo se posebno usredotočiti na poznatu matematičku konstantu π.

Aritmetičko-geometrijsku sredinu dobivamo korištenjem iterativnog postupka definiranog na sljedeći način. Prvo postavljamo dvije početne vrijednosti s i t:

$$a_0 = s,$$
$$g_0 = t,$$

a zatim u svakom sljedećem koraku izračunamo aritmetičku i geometrijsku sredinu prethodna dva izračunata broja. To se zapisuje rekurzivnim formulama oblika:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + g_n\right),$$
$$g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}, \quad n \geq 0.$$

Oba navedena niza konvergiraju ka istoj vrijednosti koju nazivamo aritmetičko-geometrijska sredina brojeva s i t, a označavat ćemo je s $AG(s,t)$. Da je to doista tako, može se lako dokazati. Naime, vrijedi sljedeća usporedba:

$$\min(s,t) \ \leq \ G(s,t) \ \leq \ AG(s,t) \ \leq \ A(s,t) \ \leq \ \max(s,t).$$

Iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine $a_n \geq g_n$, $n \geqslant 1$ imamo

$$g_{n+1} = \sqrt{g_n \cdot a_n} \geq \sqrt{g_n \cdot g_n} = g_n,$$

odnosno niz definiran geometrijskom sredinom je rastući. S obzirom da je taj niz i ograničen (maksimalnom vrijednošću od dva početna parametra niz je konvergentan, odnosno postoji realan broj L takav da

$$\lim_{n\to\infty} g_n = L.$$

Ako početnu jednadžbu zapišemo na način

$$a_n = \frac{g_{n+1}^2}{g_n},$$

dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}^2}{g_n} = \frac{L^2}{L} = L.$$

[1] Autor je izvanredni profesor na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu; e-pošta: `tomislav.buric@fer.hr`

[2] Autor je bio student FER-a u Zagrebu, a sada je zaposlen u Googleu; e-pošta: `stjepan.mestrovic@outlook.com`

Dakle, oba niza konvergiraju ka istoj vrijednosti. Također primijetimo da je niz definiran aritmetičkom sredinom padajući:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n.$$

Ponašanje nizova se može dodatno proučavati no pogledajmo prvo jedan primjer. U tablici 1 možemo vidjeti prvih par iteracija računanja aritmetičko-geometrijske sredine brojeva 3 i 14.

n	a_n	b_n
0	3	14
1	8.50000000000000000	6.48074069840786023
2	$7.\underline{4}9037034920393011$	$7.\underline{4}2201427757093525$
3	$7.\underline{4561}9231338743268$	$7.\underline{4561}1397955299241$
4	$7.\underline{456153146}47021255$	$7.\underline{456153146}36734131$
5	$7.\underline{45615314641877693}$	$7.\underline{45615314641877693}$

Tablica 1. Aritmetičko-geometrijska sredina brojeva 3 i 14.

Već iz ovog primjera možemo naslutiti brzinu konvergencije ovako definiranog postupka: u drugoj iteraciji imamo podudaranje u jednoj decimali, a u četvrtoj već na 9 decimala, tj. otprilike je u svakom koraku dvostruko više točnih decimala. Čitatelj lako može isprobati ovaj proces i za neke druge dvije proizvoljno odabrane vrijednosti (uz pomoć kalkulatora ili programa na računalu) i sam se uvjeriti da a_n i b_n zaista brzo teže prema istoj vrijednosti.

Brzina konvergencije aritmetičko-geometrijske sredine

Brzina konvergencije aritmetičko-geometrijske sredine je razlog zbog čega se primjenjuje u raznim numeričkim algoritmima. Već je i Gauss koristio to svojstvo za brzi izračun vrijednosti trigonometrijskih funkcija.

Za procjenu brzine konvergencije definirat ćemo novi niz

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{g_{n+1}}.$$

Iz definicije nizova a_n i g_n imamo:

$$x_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2\sqrt{a_n g_n}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a_n}{g_n}} + \sqrt{\frac{g_n}{a_n}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

Kako a_n i g_n teže istoj vrijednosti, znamo da će se x_n približavati jedinici, no zanima nas koliko brzo će se to odvijati. Postoji više načina određivanja te brzine, a mi ćemo pokazati jedan od jednostavnijih.

S obzirom da je $a_n \geq g_n$, uvijek će vrijediti $x_n \geq 1$. Stoga vrijede nejednakosti $\frac{1}{\sqrt{x_n}} \leq 1$ i $\sqrt{x_n} \leq x_n$, iz čega dobivamo:

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}} - 2\right) \leq \frac{1}{2}(x_n + 1 - 2) \leq \frac{1}{2}(x_n - 1),$$

odnosno

$$0 \leq x_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(x_n - 1).$$

To možemo protumačiti na način da je u svakoj sljedećoj iteraciji greška barem upola manja. Ako to uspoređujemo s početnom iteracijom, imamo

$$0 \leq x_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(x_n - 1) \leq \frac{1}{4}(x_{n-1} - 1) \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - 1),$$

tj. možemo zaključiti da je približna brzina konvergencije $\frac{1}{2^n}$. No kao što smo vidjeli u tablici 1, greška se u svakom koraku puno više smanjuje, odnosno brzina je zapravo puno veća. Složenijim izračunom se može pokazati da je brzina ustvari $\frac{1}{2^{2^n}}$.

Primjena aritmetičko-geometrijske sredine

Postoje mnogi algoritmi koji koriste aritmetičko-geometrijsku sredinu za izračun vrijednosti elementarnih funkcija. Primjerice, Gauss ju je koristio kako bi u malom broju koraka došao do velike preciznosti vrijednosti logaritamske i trigonometrijskih funkcija. Uz to, aritmetičko-geometrijska sredina se može koristiti i za izračun konstanti, a u tu svrhu uključuju se dodatni koraci koji će još ubrzati ili stabilizirati algoritam. Sada ćemo opisati jedan načina za izračun broja π.

U literaturi algoritmi za izračun decimala broja π u visokoj preciznosti često nose imena matematičara Eugenea Salamina i Richarda Brenta. Oni su neovisno jedan o drugome došli do sličnih izraza, no kako su na tom području već radili i Gauss i Legendre, imena samih algoritama sadrže kombinacije njihovih imena.

Kao osnovni algoritam za izračun konstante π često se navodi Gauss-Salaminova formula koja sadrži aritmetičko-geometrijsku sredinu brojeva 1 i $1/\sqrt{2}$ i glasi

$$\pi = \frac{4\left(AG\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}{1 - \sum_{j=2}^{\infty} 2^{j+1} c_j}, \tag{1}$$

pri čemu je $c_j = \frac{1}{2}(a_{j-1} - g_{j-1})$, gdje a_j i g_j predstavljaju aritmetičku, odnosno geometrijsku sredinu iz iterativnog postupka. S obzirom da je općenita praksa u numeričkim postupcima izbjegavati oduzimanje, koristi se sljedeća modifikacija

$$c_j = \frac{c_{j-1}^2}{4a_j}.$$

Ovu formulu možete sami lako koristiti i provjeriti, a mi ćemo se ovdje zadržati na jednom drugom algoritmu.

Algoritam koji je pogodniji za korištenje i na kojem ćemo provjeriti preciznost zove se Gauss-Legendreov i sastoji se od sljedeća tri koraka unutar kojih se također računa aritmetičko-geometrijska sredina brojeva 1 i $1/\sqrt{2}$:

1. Postavljamo početne vrijednosti
$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t_0 = \frac{1}{4}, \quad p_0 = 1.$$
2. Računamo korak iteracije
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$
$$t_{n+1} = t_n - p_n(a_n - a_{n+1})^2,$$
$$p_{n+1} = 2p_n.$$
3. Aproksimacija
$$\pi \approx \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4t_{n+1}}.$$

Broj točnih decimala broja π dobivenih ovim algoritmom je dan u sljedećoj tablici.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
broj točnih decimala	1	3	8	19	40	84	171	345	694	1392

Primijetite da smo u samo 10 koraka već dobili preko 1000 točnih decimala! Obrazloženje i dokazi ovih algoritama zahtijevaju naprednije alate matematičke analize, no zainteresiranog čitatelja upućujemo na odličnu knjigu [1] u kojoj je ova tematika detaljno obrađena.

Literatura

[1] J. M. Borwein, *Pi and the AGM, A study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, Department of mathematics, Dalhouse University, Halifax, Nova Scotia, A Wiley-Interscience Publication John Wiley and Sons, 1987.

[2] T. Burić, N. Elezović, *Asymptotic expansion of the arithmetic-geometric mean and related inequalities*, Journal of Mathematical Inequalities **9** (2015), 4; 1181–1190.

[3] S. Meštrović, *Asimptotski razvoji iterativnih sredina*, diplomski rad, FER, 2017.

[4] G. Toader, S. Toader, *Greek Means and the Arithmetic-Geometric Mean*, RGMIA Monographs, Victoria University, 2005.