Generiranje konačnih suma s binomnim koeficijentima primjenom derivacija i neodređenih integrala

Petar Svirčević[1]

U ovome članku polazimo od binomnog poučka i izvodimo različite konačne sume uz upotrebu derivacija i neodređenih integrala. Naglašavamo da do tih formula dolazimo *ab ovo*, ali kada su one dane *ad hoc*, tada iste najčešće dokazujemo matematičkom indukcijom. Dakle, navedene sume možemo dokazati samo upotrebom matematičke indukcije, premda su neki zadatci tom metodom malo zahtjevniji.

Dakle, ako je $n \in \mathbb{N}$, tada je dan binomni poučak u obliku

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n,$$

odnosno

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 - \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}a^0 b^n,$$

kojeg možemo dokazati matematičkom indukcijom. Navedimo još dva identiteta, koje ćemo koristiti, a dobiju se iz (1) i (2), ako u njih uvrstimo $a = b = 1$. Dakle

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n, \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0. \tag{1}$$

Napomena 1. Moglo bi se postaviti pitanje da li formula (1) ima praktične primjene? Odgovor je potvrdan. Uzmimo npr. analizu jednog konkretnog problema, koji je vezan za odaziv neke obitelji da bude prisutna nekoj svečanosti. Neka je npr. jedna šesteročlana obitelj pozvana na neku svečanost, s time da su moguće sve opcije s obzirom na to koliko će se članova obitelji odazvati pozivu. Dakle moguće je, da ne ide nitko ili čak da idu svi članovi obitelji. Sada se pitamo na koliko načina može ovaj poziv biti realiziran? Uz malo više truda bi dobili rezultat, da tih mogućnosti ima 64. No, ako znamo malo teorije tada je odgovor $2^6 = 64$. Svakako da bi veliki problem bio ustanoviti broj mogućih odaziva učenika nekog razreda, u kojem ima 25 učenika. Da bi na to pitanje odgovorili općenito, postavit ćemo i riješiti sljedeći zadatak.

Zadatak 1. Neka je zadan konačni skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Njegovih elemenata, tj. kardinalni broj od A je $kA = n$. Skupu A pripada partitivni skup $\mathcal{P}(A)$, koji se sastoji od svih podskupova zadanog skupa uključujući i prazan skup i sam zadani skup. Dokažimo, da tako definiran skup ima kardinalni broj 2^n, tj. $k\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Rješenje. Neka je $\emptyset$ prazni skup, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$. Dakle skup $\mathcal{P}(A)$ sadrži prazan skup, tj. njemu pripada broj $1 = \binom{n}{0}$; broj jednočlanih podskupova je $\binom{n}{1}$, broj dvočlanih je $\binom{n}{2}$,..., broj $(n-1)$-članih $\binom{n}{n-1}$ i jedan je sam skup A, tj. $1 = \binom{n}{n}$. Ako sve te brojeve zbrojimo dobivamo (1), što je i trebalo dokazati.

Sada dobivamo, da je za neveden razred iz napomene 1 mogući broj ishoda odaziva učenika na svečanost $2^{25} = 33\,554\,432$, a to znači da bi do ovog rezultata teško došli "pješke".

[1] Autor je profesor u miru na Tehničkoj školi u Zagrebu; e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

Napomena 2. U ovom članku ćemo izvesti veći broj formula za koje, možda, u ovome trenutku i ne znamo primjene, ali to ne znači da iste nisu moguće negdje drugdje gdje se koristi matematika za obradu svojih problema.

U sljedećim zadatcima koristit ćemo elementarno gradivo o derivacijama i neodređenim integralima, a iz mnemotehničkih razloga dajemo dvije definicije.

Definicija 1. Neka je $B_k(n) = \binom{n}{1}1^k + \binom{n}{2}2^k + \binom{n}{3}3^k + \ldots + \binom{n}{n}n^k$.

Definicija 2. Neka je $\overline{B}_k(n) = \binom{n}{1}1^k - \binom{n}{2}2^k + \binom{n}{3}3^k - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}n^k$.

Zadatak 2. Dokažimo sljedeće identitete:

a) $$B_1(n) = \binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}2 + \binom{n}{3}3 + \ldots + \binom{n}{n}n = n\,2^{n-1}, \tag{2}$$

b) $$B_2(n) = \binom{n}{1}1^2 + \binom{n}{2}2^2 + \binom{n}{3}3^2 + \ldots + \binom{n}{n}n^2 = n(n+1)2^{n-2}, \tag{3}$$

c) $$B_3(n) = \binom{n}{1}1^3 + \binom{n}{2}2^3 + \binom{n}{3}3^3 + \ldots + \binom{n}{n}n^3 = n^2(n+3)2^{n-3},$$

d) $$\begin{aligned} B_4(n) &= \binom{n}{1}1^4 + \binom{n}{2}2^4 + \binom{n}{3}3^4 + \ldots + \binom{n}{n}n^4 \\ &= n(n+1)(n^2+5n-2)2^{n-4}, \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} B_5(n) &= \binom{n}{1}1^5 + \binom{n}{2}2^5 + \binom{n}{3}3^5 + \ldots + \binom{n}{n}n^5 \\ &= n^2(n^3+10n^2+15n-10)2^{n-5}, \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} B_6(n) &= \binom{n}{1}1^6 + \binom{n}{2}2^6 + \binom{n}{3}3^6 + \ldots + \binom{n}{n}n^6 \\ &= n(n+1)(n^4+14n^3+31n^2-46n+16)2^{n-6}. \end{aligned}$$

Uputa za rješavanje. Ako identitet $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$ deriviramo po x, imamo $\binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}2x + \binom{n}{3}3x^2 + \ldots + \binom{n}{n}nx^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$, pa ako sada izvršimo specijalizaciju za $x = 1$ slijedi (2). Nadalje ako ovaj identitet pomnožimo s x i opet deriviramo, te izvršimo specijalizaciju $x = 1$, dobivamo (3). Jasno je, da analognim postupkom dobivamo i sve ostale sume.

Međutim, mogli bi dati analizu dobivanja rezultata za $B_6(n)$. Naime, nakon šest uzastopnih deriviranja uz prethodne transformacije i uz dosta ispisivanja dobivamo ovaj oblik za tu sumu:

$$B_6(n) = n(n^5 + 15n^4 + 45n^3 - 15n^2 - 30n + 16)2^{n-6}.$$

Lako možemo pokazati, da se ovaj polinom u zagradi dade rastaviti na faktore u obliku $(n+1)(n^4+14n^3+31n^2-46n+16)$, a daljnje rastavljanje na linearne faktore s cjelobrojnim koeficijentima nije moguće, što se može provjeriti iz ove Vièteove formule $n_1n_2n_3n_4 = 16$, koja je produkt rješenja jednadžbe $n^4+14n^3+31n^2-46n+16 = 0$.

Napomena 3. Recimo da rastav polinoma $n^4+14n^3+31n^2-46n+16$ s cjelobrojnim koeficijentima možemo ispitati, nacrtamo li (npr. koristeći program GSP 4.07) graf funkcije $f(n) = n^4+14n^3+31n^2-46n+16$, pa iz slike možemo vidjeli da jednadžba $f(n) = 0$ ima dva konjugirano kompleksna korijena i dva realna, koji nisu cijeli brojevi i nalaze se u intervalima $\langle -11, -10\rangle$, $\langle -5, -4\rangle$ respektivno, a to znači da rastav pod traženim uvjetima ne postoji.

Napomena 4. Iz zadatka 2 se vidi, da iz tih veza možemo izvesti neke kongruencije, koje se mogu dokazati matematičkom indukcijom. Npr.:

$$B_1(n+1) \equiv 0 \pmod{2^n},$$
$$B_2(n+1) \equiv 0 \pmod{(n+2)2^{n-1}},$$
$$B_4(n+3) \equiv 0 \pmod{(n^2+11n+22)},$$
$$B_6(n+5) \equiv 0 \pmod{(n+5)(n+6)2^{n-1}}.$$

Zadatak 3.

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1}\binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}, \quad n > k.$$

Uputa za rješenje. Ako identitet $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$ deriviramo k puta i specijaliziramo ga za $x = 1$, dobijemo traženu vezu.

Zadatak 4.

$$1 \cdot 2\binom{n+1}{2} + 2 \cdot 3\binom{n+1}{3} + 3 \cdot 4\binom{n}{4} + \ldots + n(n+1)\binom{n+1}{n+1} = n(n+1)2^{n-1}.$$

Uputa za rješenje. Ako u razliku $B_2(n) - B_1(n)$ umjesto n uvrstimo $n+1$, dobijemo traženi identitet.

Zadatak 5. $\overline{B}_1(n) = \binom{n}{1}1 - \binom{n}{2}2 + \binom{n}{3}3 - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}n = 0,\ n > 1.$

Rješenje. Iz $(1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}x^n$ nakon deriviranja imamo

$$\binom{n}{1}1 - \binom{n}{2}2x + \binom{n}{3}3x^2 - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}nx^{n-1} = n(1-x)^{n-1}. \tag{4}$$

Nadalje, ako izvršimo specijalizaciju $n = x = 1$, tada iz (4) dobivamo da je $1 = 0^0$, a posljedica tog neodređenog oblika je da jednakost ne vrijedi za $n = 1$.

Zadatak 6.

$$\overline{B}_k(n) = \binom{n}{1}1^k - \binom{n}{2}2^k + \binom{n}{3}3^k - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}n^k = 0, \quad n > k. \tag{5}$$

Rješenje. To je zapravo poopćenje zadatka 5. Ako promotrimo (5), zaključujemo da identitet (4) moramo pomnožiti s x i onda ga derivirati. Taj postupak počevši s (4) moramo napraviti još $(k-1)$ puta, da bi dobili oblik

$$\binom{n}{1}1^k - \binom{n}{2}2^kx + \binom{n}{3}3^kx^2 - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}n^kx^n. \tag{6}$$

Jasno je, da suma (6) sigurno sadrži član $(1-x)^{n-k}$, koji će nam generirati neodređeni oblik 0^0 za posebne vrijednosti $x = 1$ i $n = k$, odnosno, ta suma neće biti definirana za $x = 1$ i $n \le k$. No, suma (6) je jednaka 0, ako je $n > k$ i $x = 1$, jer sumandi nakon k deriviranja i množenja s x sadrže faktore $(x-1)$. Dakle, formula (5) je u potpunosti dokazana.

Provjerimo (5) za $k = 4$ i $n = 5$. Budući je $n > k$, onda mora biti

$$\overline{B}_4(5) = \binom{5}{1}1^4 - \binom{5}{2}2^4 + \binom{5}{3}3^4 - \binom{5}{4}4^4 + \binom{5}{5}5^4 = 5 - 160 + 810 - 1280 + 625 = 0.$$

Ako je npr. $n = k = 3$, tada je $\overline{B}_3(3) = \binom{3}{1}1^3 - \binom{3}{2}2^3 + \binom{3}{3}3^3 = 3 - 24 + 27 = 6 \neq 0$.

Zadatak 7. Dokazati da za svake $n,\ k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\overline{B}_k(n+k) = \binom{n+k}{1}1^k - \binom{n+k}{2}2^k + \ldots + (-1)^{n+k+1}\binom{n+k}{n+k}(n+k)^k = 0. \quad (7)$$

Uputa za rješenje. To slijedi iz (6) jer smo izbacili uvjet $n > k$. Provjerimo (7) npr. za $n = 2$ i $k = 3$. Dakle $\binom{5}{1}1^5 - \binom{5}{2}2^5 + \binom{5}{3}3^5 - \binom{5}{4}4^5 + \binom{5}{5}5^5 = \ldots = 0$, a to smo i očekivali.

Zadatak 8. Dokazati sljedeće identitete, ako je $n \in \mathbb{N}$ uz dodatni uvjet za n.

a) $\binom{2n}{1}1 + \binom{2n}{3}3 + \binom{2n}{5}5 + \ldots + \binom{2n}{2n-1}(2n-1) = n2^{2n-1}$,

b) $n > 1$, $\binom{2n}{1}1^2 + \binom{2n}{3}3^2 + \binom{2n}{5}5^2 + \ldots + \binom{2n}{2n-1}(2n-1)^2$
$= n(2n+1)2^{2n-2}$,

c) $n > 1$, $\binom{2n}{1}1^3 + \binom{2n}{3}3^3 + \binom{2n}{5}5^3 + \ldots + \binom{2n}{2n-1}(2n-1)^3$
$= n^2(2n+3)2^{2n-2}$,

d) $n > 2$, $\binom{2n}{1}1^4 + \binom{2n}{3}3^4 + \binom{2n}{5}5^4 + \ldots + \binom{2n}{2n-1}(2n-1)^4$
$= n(2n+1)(4n^2+10n-2)2^{2n-4}$,

e) $n > 2$, $\binom{2n}{1}1^5 + \binom{2n}{3}3^5 + \binom{2n}{5}5^5 + \ldots + \binom{2n}{2n-1}(2n-1)^5$
$= n^2(8n^3+40n^2+30n-10)2^{2n-4}$,

f) $n > 3$, $\binom{2n}{1}1^6 + \binom{2n}{3}3^6 + \binom{2n}{5}5^6 + \ldots + \binom{2n}{2n-1}(2n-1)^6$
$= n(2n+1)(16n^4+112n^3+124n^2-92n+16)2^{2n-6}$.

Rješenje. Sve ove jednakosti dobijemo, ako izračunamo $(B_k(2n) + \overline{B}_k(2n))/2$ gdje je $k = 1, 2, \ldots, 6$ uz uvjet $2n > k$.

Zadatak 9. Dokazati sljedeće identitete, ako je $n \in \mathbb{N}$ bez dodatnog uvjeta za n:

a) $\binom{2n}{1}1 + \binom{2n}{3}3 + \binom{2n}{5}5 + \ldots + \binom{2n}{2n-1}(2n-1) = n2^{2n-1}$,

b) $\binom{2n+2}{1}1^2 + \binom{2n+2}{3}3^2 + \binom{2n+2}{5}5^2 + \ldots + \binom{2n+2}{2n+1}(2n+1)^2$
$= (n+1)(2n+3)2^{2n}$,

c) $\binom{2n+2}{1}1^3 + \binom{2n+2}{3}3^3 + \binom{2n+2}{5}5^3 + \ldots + \binom{2n+2}{2n-1}(2n-1)^3$
$= (n+1)^2(2n+5)2^{2n}$,

d) $\binom{2n+4}{1}1^4 + \binom{2n+4}{3}3^4 + \binom{2n+4}{5}5^4 + \ldots + \binom{2n+4}{2n+3}(2n+3)^4$
$= (n+2)(2n+5)(4n^2+26n+34)2^{2n}$,

e) $\binom{2n+4}{1}1^5+\binom{2n+4}{3}3^5+\binom{2n+4}{5}5^5+\ldots+\binom{2n+4}{2n+3}(2n+3)^5$
$$=(n+2)^2(8n^3+88n^2+286n+274)2^{2n},$$

f) $\binom{2n+6}{1}1^6+\binom{2n+6}{3}3^6+\binom{2n+6}{5}5^6+\ldots+\binom{2n+6}{2n+5}(2n+5)^6$
$$=(n+3)(2n+7)(16n^4+304n^3+1996n^2+5404n+5176)2^{2n}.$$

Rješenje. Sve ove jednakosti dobijemo, ako izračunamo $(B_k(2n)+\overline{B}_k(2n))/2$ gdje je $k=1,2,\ldots,6$ uz uvjet da je $2n>k$.

Zadatak 10.
$$\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\binom{n}{j}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \qquad (8)$$

Rješenje. Ako identitet $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$ neodređeno integriramo, dobivamo vezu
$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}x^1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}x^2+\frac{1}{3}\binom{n}{2}x^3+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}x^{n+1}=\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}+C$$
iz koje se dobije konstanta $C=\dfrac{1}{n+1}$ za $x=0$, pa identitet poprima oblik
$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}x^1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}x^2+\frac{1}{3}\binom{n}{2}x^3+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}x^{n+1}=\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}-\frac{1}{n+1}. \qquad (9)$$
I konačno ako u (9) uvrstimo $x=1$, dobivamo (8).

Zadatak 11.

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j+1}\binom{n}{j}=\frac{(n-1)2^n+1}{n+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2+j+1}{j+1}\binom{n}{j}=\frac{(n+3)2^n-n-2}{n+1}$.

Uputa za rješenje. Ako od (3) oduzmemo, odnosno dodamo, (8), tada dobijemo a) odnosno b).

Zadatak 12.

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\cos j\varphi=2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\cos\frac{n\varphi}{2}, \qquad (10)$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\sin j\varphi=2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\sin\frac{n\varphi}{2}. \qquad (11)$

Uputa za rješenje. a), b). Neka je $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ kompleksni broj, dakle $|z|=1$. Iz jednakosti $(1+z)^n=(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)$ i iz jednakosti $(1+z)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(\cos j\varphi+i\sin j\varphi)$ slijede dani identiteti.

Zadatak 13.

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j\binom{n}{j}\sin j\varphi=n2^{n-1}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-1}\sin\frac{n+1}{2}\varphi, \qquad (12)$

b) $\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}\cos j\varphi = n2^{n-1}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-1}\cos\frac{n+1}{2}\varphi.$ (13)

Uputa za rješenje. a), b). Ako deriviramo identitete Z12. *a), b)* po varijabli φ, tada dobivamo navedene formule. Recimo i to, da ako u (13) uvrstimo $\varphi = 0$, tada dobivamo (2).

Zadatak 14.

a) $\sum_{j=1}^{n} j^2\binom{n}{j}\cos j\varphi = n2^{n-2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-2}\left(n\cos\frac{n+2}{2}\varphi + \cos\frac{n}{2}\varphi\right)$ (14)

b) $\sum_{j=1}^{n} j^2\binom{n}{j}\sin j\varphi = n2^{n-2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-2}\left(n\sin\frac{n+2}{2}\varphi + \sin\frac{n}{2}\varphi\right).$ (15)

Uputa za rješenje. a). b). Ako deriviramo identitete (12) i (13) po varijabli φ, tada dobivamo ove formule.

Napomena 5. Vidimo, ako u (14) uvrstimo $\varphi = 0$, dobivamo (3).

Zadatak 15. Ako je n, $k \in \mathbb{N}$ i $n \geq k$, vrijedi kongruencija

$$\left(\binom{n}{1}1^k + \binom{n}{2}2^k + \binom{n}{3}3^k + \ldots + \binom{n}{n}n^k\right) \equiv 0 \pmod{n2^{n-k}}. \tag{16}$$

Rješenje. Ako je $k = 1, 2$ tada iz (2) i (3) slijedi (16), a to je specijalni slučaj. Općenito, do ove kongruencije možemo doći, ako primijenimo *Uputu za rješenje Z2*, ali taj postupak nije pregledan i dosta je opsežan.

No, postoji pregledniji način. Dakle, ako (10) deriviramo k puta, tada lijeva strana prima oblik $\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}j^k\cos j\varphi = n2^{n-k}[\ldots]$, ako je $k \in \{2, 4, \ldots\}$. Nadalje, ako sada uzmemo da je $\varphi = 0$, imamo vezu $\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}j^k = n2^{n-k}[\ldots]$, a to znači da je (16) točno, jer nakon svake derivacije složenih trigonometrijskih elemenata dobijemo faktor 2^{-1}, koji se može izlučiti iz $[\ldots]$. Npr. $\left(\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\right)' = \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-1}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot 2^{-1}$ ili $\left(\cos\frac{n\varphi}{2}\right)' = \sin\frac{n\varphi}{2}\cdot n\cdot 2^{-1}$ ili ... Svakako, da smo nakon prve derivacije dobili faktor n, jer se on dobije ako deriviramo član $\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\cos\frac{n\varphi}{2}$. I konačno bi potvrdu kongruencije (16) dobili ako bi (11) derivirali k puta, samo je sada $k \in \{1, 3, \ldots\}$, a preostala procedura je analogna kao u prvom slučaju, pa bi time kongruencija bila u potpunosti dokazana.

Napomena 6. Navest ćemo dvije rekurzivne formule, koje se odnose na podintegralnu funkciju, koja je zavisna od dva parametra, tako da ćemo razlikovati dvije rekurzivne integracije vezane za te parametre. Naime, neka je n, $m \in \mathbb{N}$ i

$$I(n,m) = \int(\sin ax)^n(\cos ax)^m dx \tag{17}$$

tada se može pokazati da je sniženje po eksponentu n dano rekurzivnom formulom

$$I(n,m) = -\frac{(\sin ax)^{n-1}(\cos ax)^{m+1}}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m}I(n-2,m), \tag{18}$$

a sniženje po eksponentu m, s

$$I(n,m) = \frac{(\sin ax)^{n+1}(\cos ax)^{m-1}}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} I(n,m-2). \tag{19}$$

Navedimo još dvije specijalizacije od (17) i (18), dakle:

$$I(n,0) = \int \sin^n ax dx = -\frac{(\sin ax)^{n-1}\cos ax}{an} + \frac{n-1}{n} I(n-2,0), \tag{20}$$

$$I(0,m) = \int \cos^m ax dx = \frac{\sin ax(\cos ax)^{m-1}}{am} + \frac{m-1}{m} I(0,m-2). \tag{21}$$

Svakako da se podrazumijeva da je argumentni parametar $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a eksponenti n i m se mogu i općenitije definirati.

Zadatak 16.

a) $$I_1(n) = \int (\cos ax)^n \cos nax dx = \frac{1}{a2^{n+1}} \left(2ax + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{j} \binom{n}{j} \sin 2jax \right) + C, \tag{22}$$

b) $$I_2(n) = \int (\cos ax)^n \sin nax dx = -\frac{1}{a2^{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \binom{n}{j} \cos 2jax + C. \tag{23}$$

Uputa za rješenje. a), b). Ako u Z12 identitete neodređeno integriramo i izvršimo supstituciju $\varphi = 2ax$, tada dobivamo (22) i (23).

Napomena 7. Jasno je, da se (22) i (23) mogu riješiti i na standardni način, ako koristimo ove transformacije:

a) $$\cos nax = \binom{n}{0}(\cos ax)^n - \binom{n}{2}(\cos ax)^{n-2}(\sin ax)^2 + \binom{n}{4}(\cos ax)^{n-4}(\sin ax)^4 - \ldots, \tag{24}$$

b) $$\sin nax = \binom{n}{1}(\cos ax)^{n-1}\sin ax - \binom{n}{3}(\cos ax)^{n-3}(\sin ax)^3 + \binom{n}{5}(\cos ax)^{n-5}(\sin ax)^5 - \ldots \tag{25}$$

Suvišno je napominjati, da se ovdje radi o konačnim sumama, gdje je $n - k \geq 0$.

Pomoću navedenog, relacija (22) prima oblik

$$I_1(n) = \binom{n}{0} I(0,2n) - \binom{n}{2} I(2,2n-2) + \binom{n}{4} I(4,2n-4) - \ldots \tag{26}$$

Analognom postupkom bi dobili

$$I_2(n) = \binom{n}{1} I(1,2n-1) - \binom{n}{3} I(3,2n-3) + \binom{n}{5} I(5,2n-5) - \ldots \tag{27}$$

Napomenimo i to, da su u [1] navedene rekurzivne formule (18) i (19), ali nisu navedene (22) i (23), koje sada možemo izračunati na dva načina.

Zadatak 17.

a) $$I_3(n) = \binom{n}{1} \int (\cos ax)^{n-1} \sin(n+1)ax dx = -\frac{1}{na2^{n-2}} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \cos 2jax + C, \tag{28}$$

b) $$I_4(n) = \binom{n}{1} \int (\cos ax)^{n-1} \cos(n+1)ax dx = \frac{1}{na2^{n-2}} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sin 2jax + C. \tag{29}$$

Uputa za rješenje. a), b). Rezultat slijedi iz Z12 ako φ zamijenimo s $2ax$ i izvršimo neodređeno integriranje. I ove integrale možemo riješiti kao

(26) i (27), samo prije uvažimo: $\sin(n+1)ax \equiv \sin nax \cos ax + \cos nax \sin ax$, $\cos(n+1)ax \equiv \cos nax \cos ax - \sin nax \sin ax$.

Zadatak 18.

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(2j-1)^2\binom{2n-1}{2j-1}$$
$$= (2n-1)2^{n-2}\left((2n-1)\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{2n+1}{4}\pi\right) + \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{2n-1}{4}\pi\right)\right). \tag{30}$$

Uputa za rješenje. Ako u formuli (15) n zamijenimo s $2n-1$ i supstituiramo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tada nakon transformacije dobivamo (30). Provjerimo (30) za $n = 4$. Dakle

$$1^2\binom{7}{1} - 3^2\binom{7}{3} + 5^2\binom{7}{5} - 7^2\binom{7}{7} = 168,$$

a desna strana tog identiteta je $7 \cdot 4(7 \cdot 1 - 1) = 168$, što smo i očekivali.

Napomena 8. Primjenom kompliciranijih metoda infinitezimalnog računa mogu se naći npr. i ove sume (vidite [3]):

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n = n!, \tag{$*$}$$

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k+n}\binom{2n}{k}^3 = \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Napomenimo, da postoje i sume beskonačnih redova, npr.:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{3n}{n}^{-1}2^{-n} = \frac{1}{250}(20 - 12\ln 2 + 11\pi),$$

čije su vrijednosti transcedentne. I na kraju, ako uvažimo ovu prvu sumu $(*)$ i dobro poznati red $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$, tada dobivamo zanimljivu vezu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n\right]^{-1} = e.$$

Literatura

[1] I. N. Bronštejn – K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik*, TK, Zagreb, 1964.

[2] T. W. Cusick, *Recurrences for Sums of Powers of Binomial Coefficients*, J. Combin. Th., Ser. A52, 77–83, 1989.

[3] `http://mathworld.wolfram.com/`, Binomial Sums.

[4] Petar Svirčević, *Konačne sume s binomnim koeficijentima*, MAT-KOL, XXIII (3) (2017), 149–164, Banja Luka.