O simedijanama trokuta

Šefket Arslanagić[1]

U toku nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi rano smo se upoznali s definicijama visine, težišnice (medijane) i simetrale unutarnjeg kuta trokuta. Sada ćemo se upoznati s još jednim pojmom vezanim za trokut koji se zove *simedijana trokuta*. To je pravac koji je simetričan težišnici trokuta u odnosu na simetralu unutarnjeg kuta povučenog iz istog vrha. Pod simedijanom trokuta se najčešće podrazumijeva odsječak tog pravca od vrha iz kojeg je ona povučena do presječne točke s nasuprotnom stranicom.

Na slici 1 imamo:

$|AO| = m_a$ – težišnica trokuta ABC iz vrha A,

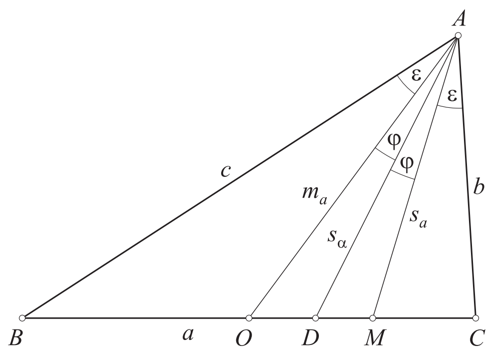
$|AD| = s_\alpha$ – simetrala unutarnjeg kuta $\sphericalangle ABC = \alpha$ trokuta ABC,

$|AM| = s_a$ – simedijana trokuta ABC iz vrha A.

Dakle, imamo ovu jednakost

$$\sphericalangle(m_a, s_\alpha) = \sphericalangle(s_\alpha, s_a) = \varphi$$

te $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAM = \varepsilon$ i vrijedi $2\varepsilon + 2\varphi = \alpha$. Sada ćemo dokazati jedan važan teorem u vezi sa simedijanom trokuta.



Slika 1.

Teorem 1. *Presječna točka M simedijane s_a s nasuprotnom stranicom $\overline{BC}$ danog trokuta ABC dijeli tu stranicu u omjeru kvadrata priležećih stranica, tj.*

$$\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}. \tag{1}$$

Dokaz. Trokuti ABM i AOC imaju istu visinu iz vrha A pa imamo

$$\frac{P_{\triangle ABM}}{P_{\triangle AOC}} = \frac{|BM|}{|OC|} \tag{2}$$

te zbog $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAO = \varepsilon + 2\varphi$

$$\frac{P_{\triangle ABM}}{P_{\triangle AOC}} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot |AM| \sin(\varepsilon + 2\varphi)}{\frac{1}{2}|AO| \cdot |AC| \sin(\varepsilon + 2\varphi)} = \frac{|AB| \cdot |AM|}{|AO| \cdot |AC|}. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) dobivamo

$$\frac{|BM|}{|OC|} = \frac{|AB| \cdot |AM|}{|AO| \cdot |AC|}. \tag{4}$$

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Trokuti BAO i MAC imaju jednaku visinu iz vrha A pa imamo

$$\frac{P_{\triangle BAO}}{P_{\triangle MAC}} = \frac{|BO|}{|CM|} \tag{5}$$

te zbog $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAM = \varepsilon$

$$\frac{P_{\triangle BAO}}{P_{\triangle MAC}} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot |AO| \sin\varepsilon}{\frac{1}{2}|AC| \cdot |AM| \sin\varepsilon} = \frac{|AB| \cdot |AO|}{|AC| \cdot |AM|}. \tag{6}$$

Sada iz (5) i (6) dobivamo

$$\frac{|BO|}{|CM|} = \frac{|AB| \cdot |AO|}{|AC| \cdot |AM|}. \tag{7}$$

Nakon množenja (4) i (7), dobivamo:

$$\frac{|BM|}{|OC|} \cdot \frac{|BO|}{|CM|} = \frac{|AB| \cdot |AM|}{|AO| \cdot |AC|} \cdot \frac{|AB| \cdot |AO|}{|AC| \cdot |AM|},$$

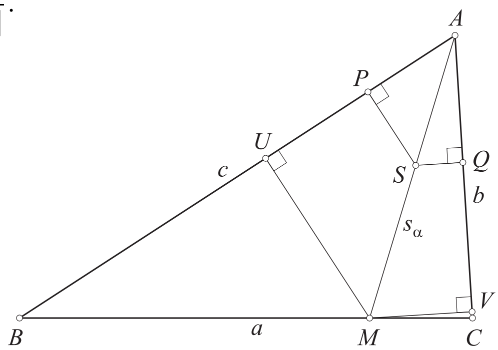
a odavde zbog $|BO| = |OC|$ imamo $\dfrac{|BM|}{|CM|} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|^2}$, što je i trebalo dokazati.

Sada ćemo dokazati još jedan teorem.

Teorem 2. *Točka S leži na simedijani iz vrha A trokuta ABC onda i samo onda ako su joj udaljenosti $|SP|$ i $|SQ|$ do stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ ($P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{AC}$) proporcionalne duljinama tih stranicama, tj.* $\dfrac{|SP|}{|SQ|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$.

Dokaz. Neka su točke U i V podnožja normala iz točke M na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC (slika 2). Promatramo li površine trokuta ABM i ACM dobivamo, primjenom teorema 1,

$$\frac{P_{\triangle ABM}}{P_{\triangle ACM}} = \frac{|AB| \cdot |MU|}{|AC| \cdot |MV|} = \frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2},$$



Slika 2.

odakle slijedi

$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{|AB|}{|AC|}. \tag{8}$$

Promatrajmo slične trokute ASP, AMU i ASQ, AMV. Vrijedi

$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{|SP|}{|SQ|}. \tag{9}$$

Sada iz (8) i (9) imamo $\dfrac{|SP|}{|SQ|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$.

Na temelju ovih razmatranja definirat ćemo simedijanu na još jedan način.

Definicija 1. Geometrijsko mjesto točaka unutar trokuta ABC za koje su udaljenosti do stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ proporcionalne duljinama tih stranica, zovemo simedijanom iz vrha A.

Naravno, analogno definiramo i simedijane iz vrhova B i C.

Sada ćemo izračunati duljinu simedijane $|AM| = s_a$ trokuta ABC. Koristit ćemo poznati *Stewartov teorem*[2] koji glasi (vidi sliku 2)

$$a(s_a^2 + m \cdot n) = b^2m + c^2n, \tag{10}$$

gdje je $m = |BM|$ i $n = |CM|$.

Iz teorema 1 imamo $\dfrac{|BM|}{|CM|} = \dfrac{c^2}{b^2}$ tj. $\dfrac{m}{n} = \dfrac{c^2}{b^2}$, a odavde $m = \dfrac{c^2}{b^2}n$, te zbog $m+n = a$ imamo $\dfrac{c^2}{b^2}n + n = a$, odakle dobivamo $n = \dfrac{ab^2}{b^2+c^2}$, $m = \dfrac{ac^2}{b^2+c^2}$.

Iz (10) redom dobivamo:

$$a\left[s_a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}\right] = \frac{ab^2c^2}{b^2+c^2} + \frac{ab^2c^2}{b^2+c^2}$$

$$\iff as_a^2 = \frac{2ab^2c^2}{b^2+c^2} - \frac{a^3b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} \Big/ : a \iff s_a^2 = \frac{2b^2c^2(b^2+c^2) - a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}$$

$$\iff s_a^2 = \frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}[2(b^2+c^2) - a^2] \iff s_a = \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2},$$

te analogno

$$s_b = \frac{ac}{a^2+c^2}\sqrt{2(a^2+c^2) - b^2}, \qquad s_c = \frac{ab}{a^2+b^2}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}.$$

Dokazat ćemo još da se sve tri simedijane trokuta sijeku u jednoj točki.

Dokaz. Neka su AM, BN, CP simedijane trougla ABC. Iz teorema 1 slijedi:

$$\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad \frac{|CN|}{|AN|} = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Nakon množenja ovih jednakosti, dobivamo:

$$\frac{|BM|}{|CM|} \cdot \frac{|CN|}{|AN|} \cdot \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1,$$

a odakle slijedi, koristeći *Cevin teorem*[3], da se simedijane AM, BN, CP sijeku u jednoj točki. Ceva je dokazao ovaj teorem 1678. godine.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] L. Nicolescu, V. Boskoff, *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnica, Bucuresti, 1990.

[3] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[4] V. V. Prasolov, *Zadači po planimetrii*, Čast 1, Nauka-Fizmatlit, 1995.

[5] E. Specht, *Geometria-scientiae atlantis*, Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, 2001.

[2] Matthew Stewart (1717. – 1785.), škotski matematičar.

[3] Giovanni Ceva (1648. – 1734.), talijanski matematičar.