ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2020. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $1/281$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadatci iz matematike

3735. Pokaži da je broj $(835^5+6)^{18}-1$ djeljiv sa 112.

3736. Riješi jednadžbu

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$$

3737. Odredi minimum od

$$\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$$

za sve $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\in\left(\frac{1}{4},1\right)$.

3738. Bočne strane pravilne trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ su kvadrati čije dijagonale su $\overline{AC_1}$, $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$. Nađite kut između pravaca AC_1 i BA_1, CB_1 i AC_1, BA_1 i CB_1.

3739. Dan je pravokutan trokut ABC s hipotenuzom $\overline{BC}$ i na njoj točka O. Iz B i C povučene su okomice BM i CN na pravac AO. Dokaži jednakost

$$|AM|^2+|BN|^2=|OM|^2+|ON|^2+2|BO||OC|.$$

3740. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut u kojem je $\sphericalangle ADC=135^\circ$. Nadalje vrijedi: $\sphericalangle ADB-\sphericalangle ABD=2\sphericalangle DAB=4\sphericalangle CBD$. Ako je $|BC|=\sqrt{2}|CD|$ dokaži $|AB|=|BC|+|AD|$.

3741. Dan je jednakokračan trokut ABC tako da je $|AB|=|AC|=b$, $|BC|=a$ i vrijedi $a^3+b^3=3ab^2$. Dokaži da je $\sphericalangle CAB=20^\circ$ ili 100°.

3742. Dan je pravokutan trokut ABC, $\sphericalangle CAB=90^\circ$. Neka je I središte upisane mu kružnice, a D i E su redom sjecišta pravaca BI i CI s AC i AB. Dokaži da vrijedi

$$\frac{|BI|^2+|ID|^2}{|CI|^2+|IE|^2}=\frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

3743. Ako je r polumjer upisane kružnice trokuta i s njegov poluopseg, dokaži nejednakost

$$s^2\geq 27r^2.$$

3744. Na stranicama šesterokuta koji ima središte simetrije, konstruirani su izvana jednakostranični trokuti. Vrhovi tih trokuta, koji nisu vrhovi početnog šesterokuta, vrhovi su novog šesterokuta. Dokaži da su polovišta stranica tog šesterokuta vrhovi pravilnog šesterokuta.

3745. Dokaži da za svaki prirodan broj $n\geq 3$ vrijedi nejednakost

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{3}{2}-\frac{1}{n}.$$

3746. Dokaži da za svaki pozitivan cijeli broj n vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}.$$

3747. Osni presjek stošca je jednakokračan trokut kojemu je kut uz bazu jednak α. Polumjer upisane mu kružnice je r. Odredi volumen stošca.

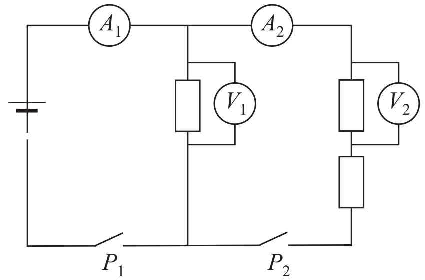
3748. Ako je p prost broj dokaži da je $\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod{p}$.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 466. Automobil Tesla P100 Ludicrous je prije tri godine zadivio svijet automobilske industrije svojim nečujnim ubrzavanjem iz mirovanja do brzine 60 milja na sat za 2.28 sekundi. Masa automobila s vozačem je 2300 kilograma. Jedna milja ima 1.6 kilometara. Izračunaj snagu tog automobila.

OŠ – 467. Saonice se spuštaju niz snježnu padinu visoku 20 i dugačku 60 metara. Nakon toga slete na ravni dio po kojem se gibaju 40 metara dok ne stanu. Koeficijent trenja na padini je tri puta manji nego na ravnom dijelu. Koliki su ti koeficijenti?

OŠ – 468. Svi otpornici na slici su jednaki. Izvor ima napon 12 V. Kad su oba prekidača zatvorena ampermetar A_1 pokazuje 0.6 ampera. Koliko pokazuju ostali instrumenti? Koliko će pokazivati svi instrumenti kad se prekidač P_2 otvori?

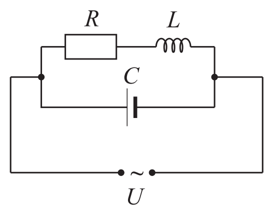


OŠ – 469. Konvergentna leća stvara prividnu sliku udaljenu 30 cm od leće. Slika je dvostruko veća od predmeta. Kolika je jakost te leće?

1721. Olovna kugla mase 2 kg rotira jednoliko usporeno. U poslijednjih 8 sekundi do zaustavljanja kugla se okrenula točno 5 puta. Odredi kutno ubrzanje i moment sile koji je djelovao na kuglu. Gustoća olova je $11.3\ \text{g/cm}^3$.

1722. Satelit se giba oko Zemlje tako da mu je kutna brzina dvostruko veća u perigeju (najbližoj) nego u apogeju (najdaljoj) točki putanje. Ako je ophodno vrijeme satelita 6 sati, izračunaj kojim se rasponom brzina satelit giba u odnosu na Zemlju i koliki je ekscentricitet njegove putanje. Masa Zemlje je $6 \cdot 10^{24}$ kg.

1723. Koliki treba biti kapacitet spojenog kondenzatora da bi strujni krug na slici bio u rezonanciji pri frekvenciji 500 Hz, ako je $R = 20\ \Omega$, $L = 10$ mH i $U = 220$ V?



1724. Smjesu vode i alkohola zagrijali smo u kalorimetru dovodeći toplinu 12 000 J, pri čemu je temperatura porasla za 8 °C. Ako je u smjesi bilo 2 dl vode, koliko je bilo alkohola? Gubitke topline zanemari, a specifični toplinski kapacitet vode je 4190 J/kgK, alkohola 2500 J/kgK. Gustoća vode je 1 kg/l, a alkohola 0.789 kg/l.

1725. Automobil mase 900 kg penje se jednolikom brzinom 50 km/h uz uzbrdicu nagiba 9°. Ako je koeficijent trenja s podlogom 0.09, odredi trenutnu snagu motora.

1726. Sabirna leća jačine +4.5 dpt. načinjena je od stakla indeksa loma 1.52. Ako je debljina stakla na optičkoj osi 5 mm, odredi debljinu stakla na rubu udaljenom 2.5 cm od optičke osi.

1727. Element kalij sadrži 0.012 % radioaktivnog ^{40}K, vremena poluraspada 1.277 milijardi godina. Koliki je bio udio ^{40}K pri formiranju Zemlje, prije 4.5 milijardi godina? Koliko je puta radioaktivnost kalija tada bila veća nego danas?

C) Rješenja iz matematike

3707. *Ako su a i b cijeli brojevi takvi da je $8a^2 + 1 = b^2$, dokaži da je njihov umnožak djeljiv s 3.*

Prvo rješenje. Treba dokazati da 3 dijeli ab tj. da je barem jedan od brojeva a i b djeljiv s 3. Sredimo dani izraz:

$$8a^2 + 1 = b^2$$
$$8a^2 = b^2 - 1$$
$$8a^2 = (b+1)(b-1).$$

Ako a nije djeljiv s 3, tada iz gornjeg izraza vidimo da niti $b+1$ niti $b-1$ ne mogu biti djeljivi s 3, odakle slijedi da je b djeljiv s 3 (jer imamo 3 uzastopna cijela broja $b-1$, b i $b+1$, a među njima $b-1$ i $b+1$ nisu djeljivi s 3). Iz toga zaključujemo da je uvijek ili a ili b djeljiv s 3, što znači da će umnožak tih brojeva ab uvijek biti djeljiv s 3.

Filip Vučić (1),
XV. gimnazija, Zagreb

Drugo rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. neka umnožak ab nije djeljiv s 3. To znači da niti jedan od brojeva a i b nije djeljiv s 3. Dakle, cijeli broj a je oblika $3k \pm 1$, pa iz danog uvjeta imamo:

$$\begin{aligned} b^2 &= 8a^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 \\ &= 8(9k^2 \pm 6k + 1) + 1 \\ &= 3(24k^2 \pm 16k + 3). \end{aligned}$$

To znači da je b^2 djeljiv s 3, a to je moguće samo ako je b djeljiv s 3. Dobili smo proturječje s pretpostavkom da ab nije djeljivo s 3. Ovime je tvrdnja dokazana.

Oliver Kukas (3), Gimnazija A. G. Matoša, Zabok

3708. *U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu*

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} + (3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 2.$$

Prvo rješenje. Vidimo da su jedini uvjeti $x \neq 1$ i $x \neq 3$. Uvedemo li supstituciju $t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}$, dana jednadžba glasi:

$$(x-1)t + (3-x)\frac{1}{t} = 2. \qquad (1)$$

Vidimo da još vrijedi i:

$$(3-x)t^3 + (x-1)\frac{1}{t^3} = 2. \qquad (2)$$

Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo:

$$(x-1)\left(t - \frac{1}{t^3}\right) + (3-x)\left(\frac{1}{t} - t^3\right) = 0.$$

Iz $t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} \implies x - 1 = (3-x)t^3$, pa je:

$$(3-x)(t^4 - 1) + (3-x)\left(\frac{1}{t} - t^3\right) = 0$$

$$\implies (3-x)\left(t^4 - t^3 - 1 + \frac{1}{t}\right) = 0.$$

Kako je $x \neq 3$ imamo redom:

$$\begin{aligned} t^4 - t^3 - 1 + \frac{1}{t} &= 0 \ / \ \cdot t, \quad t \neq 0 \\ t^5 - t^4 - t + 1 &= 0 \\ t^4(t-1) - (t-1) &= 0 \\ (t-1)(t^4 - 1) &= 0 \\ (t-1)^2(t+1)(t^2+1) &= 0. \end{aligned}$$

1° $t = 1 \implies \sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = 1 \implies x_1 = 2,$

2° $t = -1 \implies \sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = -1 \implies$
$x - 1 = x - 3$, što nije moguće.

Dakle, $x = 2$ je jedino rješenje dane jednadžbe.

Oliver Kukas (3), Zabok

Drugo rješenje. Dana jednadžba ima smisla za $x \neq 1$ i $x \neq 3$. Neka je $t = \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} \neq 0$. Tada je

$$(x-1) \cdot \frac{1}{t} + (3-x)t = 2, \qquad \text{tj.}$$

$$\frac{(3-x)t^2 - 2t + (x-1)}{t} = 0.$$

Odavde iz kvadratne jednadžbe

$$(3-x)t^2 - 2t + (x-1) = 0$$

po t je $t = 1$ ili $t = \frac{x-1}{3-x}$.

U prvom slučaju je $x = 2$, u drugom je $\left(\frac{3-x}{x-1}\right)^4 = 1$, odnosno $\frac{3-x}{x-1} = 1$ tj. $x = 2$ ili $\frac{3-x}{x-1} = -1$, što nema rješenja.

Dakle, jedino rješenje je $x = 2$.

Ur.

3709. *Matematičkom indukcijom dokaži da ako je n prirodan broj, tada je $5^n \equiv 1 + 4n \ (mod\ 16)$.*

Rješenje. Zapravo trebamo dokazati da je broj $5^n - 4n - 1$ djeljiv sa 16, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Baza. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi.

Pretpostavka. Neka je broj $5^k - 4k - 1$ djeljiv sa 16 za neki prirodan broj $k \geqslant 1$.

Korak. Dokažimo da je i broj $5^{k+1} - 4(k+1) - 1$ također djeljiv sa 16.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 4(k+1) - 1 &= 5 \cdot 5^k - 4k - 5 \\ &= 5 \cdot 5^k - 20k + 16k - 5 \\ &= 5(5^k - 4k - 1) + 16k. \end{aligned}$$

Sada je prvi pribrojnik djeljiv sa 16 po pretpostavci indukcije, a drugi je očito djeljiv sa 16, pa je time i zadatak riješen.

Oliver Kukas (3), Zabok

3710. *Nađi sva rješenja sistema jednadžbi*

$$\log^2 x + \log^2 y = 7$$
$$\log x - \log y = 2.$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $u = \log x$ i $v = \log y$. Dani sustav ekvivalentan je sa:

$$u^2 + v^2 = 7$$
$$\underline{u - v = 2}$$
$$v = u - 2$$
$$u^2 + (u-2)^2 = 7$$

$$2u^2 - 4u - 3 = 0 \quad \text{tj.} \quad u_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

1°
$$u_1 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \implies v_1 = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$\log x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \implies x_1 = 10 \cdot 10^{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$
$$\log y = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \implies y_1 = \frac{1}{10} \cdot 10^{\frac{\sqrt{10}}{2}};$$

2°
$$u_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \implies v_2 = -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$\log x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \implies x_2 = 10 \cdot 10^{-\frac{\sqrt{10}}{2}}$$
$$\log y = -1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \implies y_2 = \frac{1}{10} \cdot 10^{-\frac{\sqrt{10}}{2}};$$

Oliver Kukas (3), Zabok

3711. *Može li funkcija $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin\lfloor x \rfloor$, biti periodička?*
($\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

Rješenje. Pretpostavimo da je funkcija f periodična s periodom $T > 0$, tj. $f(x+T) = f(x)$ ili $\sin\lfloor x+T \rfloor = \sin\lfloor x \rfloor$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Odavde slijedi

$$\lfloor x+T \rfloor = \lfloor x \rfloor = 2k(x)\pi, \quad x \in \mathbb{R}$$

gdje je $k : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ funkcija s cjelobrojnim vrijednostima.

Kako je π iracionalan broj, mora biti $k(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor x+T \rfloor = \lfloor x+2T \rfloor = \ldots = \lfloor x+lT \rfloor.$$

Kako je $l > 0$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $x + lT > x + 1$ tj.

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor x+lT \rfloor > \lfloor x \rfloor,$$

što ne može biti. Zato funkcija $\sin\lfloor x \rfloor$ ne može biti periodička.

Oliver Kukas (3), Zabok

3712. *Duljine stranica trokuta su a, b, c, dok je visina na stranicu a jednaka h_a. Dokaži nejednakost*

$$a^2 + 4h_a^2 \leqslant (b+c)^2.$$

Rješenje. Vrijedi redom:

$$a^2 + 4h_a^2 \leqslant (b+c)^2$$
$$a^2 + 4\left(\frac{2P}{a}\right)^2 \leqslant (b+c)^2$$
$$a^2 + \frac{16P^2}{a^2} \leqslant (b+c)^2$$
$$a^2 + \frac{16}{a^2} \cdot \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \leqslant (b+c)^2$$
$$\frac{[(b+c)^2 - a^2] \cdot (a+b-c)(a+c-b)}{a^2} \leqslant (b+c)^2 - a^2$$
$$(a+b-c)(a+c-b) \leqslant a^2$$
$$b^2 - 2bc + c^2 \geqslant 0$$
$$(b-c)^2 \geqslant 0,$$

što je točno.

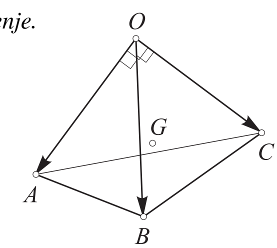
Jednakost se postiže u slučaju $b = c$ tj. ako i samo ako je trokut jednakokračan.

Oliver Kukas (3), Zabok

3713. *Ako je G težište tetraedra $OABC$ kod kojeg je $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = \sphericalangle AOB = 90°$, dokaži*

$$|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2 = 11|GO|^2.$$

Rješenje.



Neka je $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OG} = \vec{g}$ i neka je O ishodište koordinatnog sustava. Tada je $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$ i

$$\begin{aligned}
&|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2 \\
&= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}|^2 + |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}|^2 + |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}|^2 \\
&= \frac{1}{16}(|3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}|^2 + |-\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}|^2 \\
&\quad + |-\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}|^2) \\
&= \frac{1}{16}(9a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + 9b^2 + c^2 \\
&\quad + a^2 + b^2 + 9c^2) \\
&= \frac{11}{16}(a^2 + b^2 + c^2)
\end{aligned}$$

(jer je $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$) i

$$|GO|^2 = \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Odavde slijedi tvrdnja.

Oliver Kukas (3), Zabok

3714. *Ako je*

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = 7,$$

izračunaj $\sin^2 2\alpha$.

Rješenje. Iz danog uvjeta imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} &= 7 \\
\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{1+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} &= 7 \\
\frac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} &= 7,
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
&(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1 \\
&\qquad = 7\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 7\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&9\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 2 \\
&4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{8}{9} \\
&\sin^2 2\alpha = \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Borna Gojšić (2),
Gimnazija Karlovac, Karlovac

3715. *Ako za površinu trokuta vrijedi*

$$P = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$$

dokaži $\alpha = 45^\circ$.

Rješenje. Uz dani uvjet

$$P = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \quad \text{i}$$
$$P = \frac{bc}{2}\sin\alpha,$$

imamo

$$\begin{aligned}
bc\sin\alpha &= \frac{1}{2}[b^2 + c^2 - (b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha)] \\
\sin\alpha &= \cos\alpha \\
\operatorname{tg}\alpha &= 1.
\end{aligned}$$

Dakle, $\alpha = 45^\circ$.

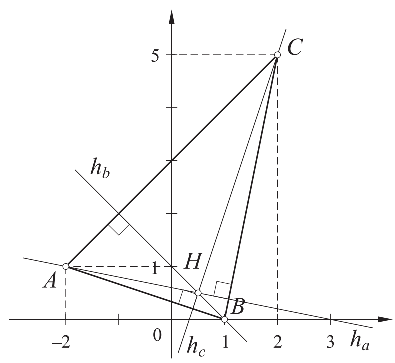
Borna Gojšić (2), Karlovac

3716. *Visine trokuta* ABC *povučene iz vrhova* A *i* B *leže redom na pravcima* $x + 5y - 3 = 0$ *i* $x + y - 1 = 0$, *a stranica* $\overline{AB}$ *na pravcu* $x + 3y - 1 = 0$. *Nađi jednadžbe pravaca na kojima leže stranice* $\overline{BC}$ *i* $\overline{CA}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&h_a \ldots\ x + 5y - 3 = 0 \\
&h_b \ldots\ x + y - 1 = 0 \\
&h_a \cap h_b = \{H\},
\end{aligned}$$

tj. $H\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ je ortocentar trokuta ABC.



$AB \cap h_a = \{A\}$ i slijedi $A(-2, 1)$.

$AB \cap h_b = \{B\}$ i slijedi $B(1, 0)$.

$BC \ldots\ y = kx + l$.

No, kako je $BC \perp h_a \implies k_{BC} = 5$ i točka $B(1,0)$ leži na pravcu BC pa dobivamo:

$$BC \ldots \ 5x - y - 5 = 0.$$

Analogno, kako je $AC \perp h_b \implies k_{AC} = 1$ i točka $A(-2,1)$ leži na njemu pa dobivamo:

$$AC \ldots \ x - y + 3 = 0.$$

Na sjecištu pravaca AC i BC nalazi se treći vrh trokuta $C(2,5)$.

Oliver Kukas (3), Zabok

3717. *Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leqslant 3.$$

Prvo rješenje. Krenimo od poznate A-G nejednakosti:

$$\begin{aligned}
&\frac{1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2^2}+1+\frac{1}{2^n}}{n} \\
&\geqslant \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} \\
&\implies \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \\
&\leqslant \left[1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\right]^n \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)^n \\
&< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < 3.
\end{aligned}$$

Oliver Kukas (3), Zabok

Drugo rješenje. Dokazat ćemo strožu nejednakost:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leqslant 3\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Dokaz matematičkom indukcijom.

Za $n = 1$ je

$$1+\frac{1}{2} \leqslant 3\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

tj. $\frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2}$, što je istinito.

Prepostavimo da je

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leqslant 3\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \\
&\qquad \cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&\leqslant 3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Dovoljno je pokazati da vrijedi

$$3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Sređivanjem se dobiva

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{2n+1}} &\leqslant 1-\frac{1}{2^{n+1}} \quad / \cdot 2^{n+1} \\
-2+1-\frac{1}{2^n} &\leqslant -1 \\
\iff -\frac{1}{2^n} &\leqslant 0
\end{aligned}$$

što vrijedi.

Zato je nejednakost istinita za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Ur.

3718. *Ravninski lik površine 5 prekriven je s 9 manjih likova od kojih svaki ima površinu 1. Dokaži da postoje dva manja lika koji imaju zajedničku površinu veću ili jednaku $\frac{1}{9}$.*

Prvo rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da svaka dva manja lika imaju zajednički presjek površine manje od $\frac{1}{9}$. Označimo te likove sa L_1, $L_2, \ldots, L_9$. Tada je površina lika $L_1 = 1$. Površina lika $L_1 \cup L_2$ je veća od $1+\frac{8}{9}$. Površina od $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ je veća od $1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}\ldots$ Površina od $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_9$ je veća od

$$1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9} = \frac{45}{9} = 5,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom da je njihova zajednička površina jednaka 5.

Filip Vučić (1), Zagreb

Drugo rješenje. Označimo 9 manjih likova sa L_1, $L_2, \ldots, L_9$ i njihove površine sa $|L_i|$,

$i = 1, 2, \ldots, 9$. Kako je $\sum_{i=1}^{9} |L_i| = 9 > 5$, postoje barem dva manja lika koja se preklapaju. Pretpostavimo li da za sve $1 \leqslant i < j \leqslant 9$ vrijedi $|L_i \cap L_j| < \frac{1}{9}$, tada prema formuli uključivanja-isključivanja vrijedi:

$$\begin{aligned}
&|L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_9| \\
&= \sum_{i=1}^{9} |L_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 9} |L_i \cap L_j| \\
&\quad + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 9}^{9} |L_i \cap L_j \cap L_k| \\
&\quad - \ldots + |L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_9| \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{9} |L_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 9}^{9} |L_i| \\
&> 9 - \binom{9}{2} \cdot \frac{1}{9} = 5.
\end{aligned}$$

No, kako su svi likovi sadržani unutar jednog većeg ravninskog lika površine 5, mora vrijediti:

$$|L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_9| = 5,$$

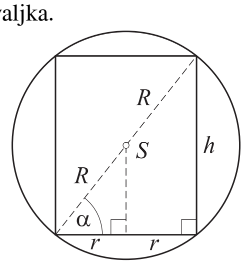
a to je proturječje s gornjom pretpostavkom.

Dakle, postoje dva manja lika L_i, L_j $(1 \leqslant i < j \leqslant 9)$ tako da je $|L_i \cap L_j| \geqslant \frac{1}{9}$.

Oliver Kukas (3), Zabok

3719. *Valjak je upisan u sferu radijusa R. Kut između najveće dužine valjka i njegove baze je α. Koliki je volumen valjka?*

Rješenje. Nacrtajmo osni presjek sfere i njoj upisanog valjka.



Najveća dužina valjka je zapravo dijametar sfere. Vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{r}{R} \implies r = R\cos\alpha.$$

Koristeći Pitagorin poučak imamo

$$\begin{aligned}
h &= \sqrt{(2R)^2 - (2r)^2} = \sqrt{4R^2 - 4R^2\cos^2\alpha} \\
&= 2R\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 2R\sin\alpha.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
V &= r^2\pi \cdot h \\
&= 2R^3\pi\sin\alpha\cos^2\alpha \\
&= R^3\pi\sin 2\alpha\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Oliver Kukas (3), Zabok

3720. *Koliko ima uređenih parova (m, n) cijelih brojeva za koje je $mn > 0$ i*

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3?$$

Rješenje. Stavimo $m + n = s$. Tada je

$$m^3 + n^3 + 3mn(m + n) = s^3.$$

Oduzimanjem dane jednakosti od ove imamo

$$s^3 - 33^3 = 3mns - 99mn.$$

Odavde dobivamo

$$(s - 33)(s^2 + 33s + 33^2 - 3mn) = 0.$$

Dakle, $s = 33$ ili

$$(m + n)^2 + 33(m + n) + 33^2 - 3mn = 0.$$

Druga jednadžba je ekvivalentna s

$$(m - n)^2 + (m + 33)^2 + (n + 33)^2 = 0$$

čija su jedina rješenja $m = -33$, $n = -33$.

S druge strane je $m + n = 33$, a kako su m i n istog predznaka dobivamo parove $(-33, -33)$, $(1, 32)$, $(2, 31), \ldots, (33, 1)$, što je 32 parova.

Dakle, ukupno ima 33 para.

Oliver Kukas (3), Zabok

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 458. *Srce zdravog čovjeka u mirovanju kuca frekvencijom od oko 70 otkucaja u minuti. U slučaju velikog napora taj se broj može udvostručiti. Prilikom svakog otkucaja srce obavi rad jednak onome koji se obavi kad se udžbenik za fiziku mase 200 grama podigne metar visoko. Kolika je snaga srca u mirovanju, a kolika kad čovjek naporno radi?*

Rješenje.

$n_1 = 70, \quad n_2 = 140$

$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

$m = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}$

$\underline{h = 1 \text{ m}}$

$P_1, \quad P_2 = ?$

$$W_1 = 70E_{gp} = 70mgh$$

$$= 70 \cdot 0.2 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1 \text{ m} = 140 \text{ J}$$

$$P_1 = \frac{W_1}{t} = \frac{140 \text{ J}}{60 \text{ s}} = 2.33 \text{ W}$$

$$P_2 = 2P_1 = 4.66 \text{ W}.$$

Antonija Glasnović (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 459. *Ivan i Hrvoje žive u kućama koje su udaljene 5.4 kilometra. Obojica su istovremeno krenuli iz svojih kuća jedan prema drugome. Ivan je hodao brzinom 4.8 km/h, a Hrvoje brzinom 4.2 km/h. Hrvojev pas je krenuo kad i oni. Pas trči brzinom 8 km/h od Hrvoja do Ivana, pa opet natrag do Hrvoja i tako trči od jednog do drugog sve dok se oni ne sretnu. Koliki će put pretrčati pas?*

Rješenje.

$s = 5.4 \text{ km}$

$v_I = 4.8 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_H = 4.2 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$\underline{v_p = 8 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}}$

$s_p = ?$

Ivan i Hrvoje se približavaju brzinom v koja je jedna zbroju njihovih brzina

$$v = v_I + v_H = 9 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Vrijeme susreta će biti

$$t = \frac{s}{v} = \frac{5.4 \text{ km}}{9 \text{ km/h}} = 0.6 \text{ h}.$$

Pas će za to vrijeme pretrčati put

$$s_p = v_p t = 8 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0.6 \text{ h} = 4.8 \text{ km}.$$

Porin Kotnik (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 460. *Masa 100 metara metalne žice iznosi 4 kilograma. Njen je otpor 40 Ω. Izračunaj električni otpor tog metala ako mu je gustoća 8000 kg/m^3.*

Rješenje.

$m = 4 \text{ kg}$

$l = 100 \text{ m}$

$R = 40 \ \Omega$

$\underline{\rho_1 = 8000 \text{ kg/m}^3}$

$\rho = ?$

$$V = \frac{m}{\rho_1} = \frac{4 \text{ kg}}{8000 \text{ kg/m}^3}$$

$$= 0.0005 \text{ m}^3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$V = sl$$

$$s = \frac{V}{l} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\rho = \frac{Rs}{l} = 2 \cdot 10^{-6} \ \Omega\text{m}.$$

Porin Kotnik (8), Zagreb

OŠ – 461. *Akvarij je dugačak 80 cm i širok 50 cm. Prije nego se u njega stave tropske ribice vodu u njemu treba zagrijati na 24 °C. Početna temperatura vode iznosila je 16 °C. Grijač snage 6 kilovata je ugrijao vodu na željenu temperaturu za 896 sekundi. Kolika je dubina vode u akvariju? Gustoća vode je 1000 kg/m^3, a njezin specifični toplinski kapacitet je 4200 J/kg °C.*

Rješenje.

$a = 80 \text{ cm}$

$b = 50 \text{ cm}$

$t_1 = 16 \ ^\circ\text{C}$

$t_2 = 24 \ ^\circ\text{C}$

$P = 6 \text{ kW}$

$t = 896 \text{ s}$

$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$\underline{c = 4200 \text{ J/kg} \ ^\circ\text{C}}$

$h = ?$

$$Q = Pt = 6000 \text{ W} \cdot 896 \text{ s} = 5\,376\,000 \text{ J}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 8 \ ^\circ\text{C}$$

$$m = \frac{Q}{\Delta t \cdot c}$$
$$= \frac{5\,376\,000\ \text{J}}{8\,^\circ\text{C} \cdot 4200\ \text{J/kg}\,^\circ\text{C}} = 160\ \text{kg}$$
$$V = \frac{m}{\rho} = 0.16\ \text{m}^3$$
$$h = \frac{V}{ab} = \frac{0.16\ \text{m}^3}{0.8\ \text{m} \cdot 0.5\ \text{m}}$$
$$= 0.4\ \text{m} = 40\ \text{cm}.$$

Antonija Glasnović (8), Zagreb

1707. *Odredi aktivnost (broj raspada u sekundi) jednog grama prirodnog uranija. Atomska težina uranija je 238.03 g/mol. Izotopski sastav i vremena poluraspada u godinama su*

^{238}U	99.2745 %	$4.468 \cdot 10^9$
^{235}U	0.72 %	$7.038 \cdot 10^8$
^{234}U	0.0055 %	$2.455 \cdot 10^5$

Rješenje. Broj atoma u gramu uranija izračunamo iz atomske mase i Avogadrovog broja:

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A = \frac{1}{238.03} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}$$
$$= 2.529933 \cdot 10^{21}.$$

Za svaki izotop, aktivnost izračunamo iz broja atoma tog izotopa i vremena poluraspada:

$$A = \frac{N}{T} \ln 2 = \frac{p \cdot N_0 \ln 2}{T},$$

odakle slijedi (godina u nazivniku iznosi 31 557 600 sekundi):

$$A_{238} = \frac{0.992745 \cdot 2.529933 \cdot 10^{21} \cdot 0.693147}{4.468 \cdot 10^9 \cdot 31\,557\,600}$$
$$= 12\,347\ \text{Bq},$$
$$A_{235} = \frac{0.072 \cdot 2.529933 \cdot 10^{21} \cdot 0.693147}{7.038 \cdot 10^8 \cdot 31\,557\,600}$$
$$= 568.5\ \text{Bq},$$
$$A_{234} = \frac{0.000055 \cdot 2.529933 \cdot 10^{21} \cdot 0.693147}{2.455 \cdot 10^5 \cdot 31\,557\,600}$$
$$= 12\,449\ \text{Bq}.$$

Uočimo da je aktivnost izotopa 234 i 238 jednaka do na točnost ulaznih podataka. S obzirom da ^{234}U nastaje raspadom ^{238}U, zaključujemo da je broj jezgri ^{234}U koji se raspada jednak broju jezgri koje nastaju. Takvo se stanje zove *sekularna ravnoteža*.

Ur.

1708. *Na površini Mjeseca izmjeren je prosječni tlak $3 \cdot 10^{-10}$ Pa. Ako je radijus mjeseca 1737 km, a ubrzanje sile teže na površini 1.62 m/s^2, odredi masu cjelokupne "atmosfere" Mjeseca.*

Rješenje. Uz uvjet da je debljina "atmosferskog" sloja zanemariva u odnosu na veličinu Mjeseca, tlak na površini je kvocijent težine atmosfere i površine, dakle

$$p = \frac{mg}{A},$$

pa je masa jednaka

$$m = \frac{pA}{g} = \frac{3 \cdot 10^{-10} \cdot 4\pi \cdot (1.737 \cdot 10^6)^2}{1.62}$$
$$= 7021\ \text{kg}.$$

Borna Gojšić (2),
Gimnazija Karlovac, Karlovac

1709. *Tijelo ubrzava jednoliko, tako da prevali 1 metar u 2.5 s, a u sljedećih 2.5 s još dva metra. Koliko je ubrzanje i početna brzina?*

Rješenje. U jednadžbu jednoliko ubrzanog gibanja uvrstimo podatke za $t = 2.5$ s i $t = 5$ s:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2,$$
$$1 = 2.5 v_0 + \frac{a \cdot 2.5^2}{2},$$
$$3 = 5 v_0 + \frac{a \cdot 5^2}{2}.$$

Množenjem prve jednadžbe s 2 i uvrštavanjem $5v_0$ u drugu jednadžbu dobijemo

$$2 = 5v_0 + 6.25a$$
$$3 = 5v_0 + 12.5a$$
$$3 = 2 - 6.25a + 12.5a$$
$$a = \frac{1}{6.25} = 0.16\ \text{m/s}^2.$$

Uvrštavanje u bilo koju od dvije polazne jednadžbe daje $v_0 = 0.2$ m/s. Dakle ubrzanje tijela je 0.16 m/s^2, a početna brzina 0.2 m/s.

Borna Cesarec (2),
Srednja škola Krapina, Krapina

1710. *Dalekovidna osoba koristi naočale jačine* $+2.25$ *dpt za čitanje. Na kojoj će minimalnoj daljini od očiju osoba jasno vidjeti tekst s naočalama, ako je najmanja daljina oštrog vida bez naočala 80 cm?*

Rješenje. Ako osoba može izoštriti sliku na 80 cm bez naočala, jačina akomodacije oka joj iznosi

$$J = \frac{1}{d} = \frac{1}{0.8} = 1.25 \text{ dpt}.$$

Kad osoba stavi naočale, jačine se zbrajaju, pa je nova jačina

$$J' = J + 2.25 = 3.5 \text{ dpt}.$$

Uz toliku akomodaciju na blizinu (dioptrija leća u bliskom kontaktu je aditivna veličina), minimalna daljina jasnog vida s naočalama iznosi

$$d' = \frac{1}{J'} = \frac{1}{3.5} = 0.2857 \text{ m} = 28.57 \text{ cm}.$$

Ur.

1711. *Jupiter i Saturn naći će se 21. 12. 2020. međusobno vrlo blizu na nebu (to zovemo konjunkcija dvaju planeta). Ako su duljine velikih poluosi putanja 5.203 a.j. za Jupiter i 9.539 a.j. za Saturn, odredi kada će se njihovi položaji sljedeći puta poklopiti (uz zanemarivanje ekscentričnosti putanja i razlike položaja Zemlje u oba slučaja).*

Rješenje. Treći Keplerov zakon povezuje duljinu poluosi putanje i ophodno vrijeme oko Sunca. Ako znamo da je ophodno vrijeme Zemlje 1 godina, a duljina velike poluosi 1 a.j., možemo iz zadanoga odrediti ophodna vremena Zemlje, Jupitera i Saturna:

$$T_Z = a_Z^{1.5} = 1^{1.5} = 1 \text{ god},$$
$$T_J = a_J^{1.5} = 5.203^{1.5} = 11.868 \text{ god},$$
$$T_S = a_S^{1.5} = 9.539^{1.5} = 29.461 \text{ god}.$$

Kako se svi planeti gibaju istim smjerom oko Sunca, vrijeme potrebno da Jupiter napravi 1 krug više od Saturna dobijemo odbijanjem kutnih brzina ili inverza vremena:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_S} \implies T = 19.874 \text{ god}.$$

Taj period iznosi 20 godina minus 46 dana, što bi za sljedeću konjunkciju dalo datum 5. 11. 2040. Astronomski točan podatak je 27. 10. 2040., što znači da smo zanemarivanjem ekscentričnosti putanja i položaja Zemlje pogriješili 9 dana.

Ur.

1712. *Dva ohmska otpornika su spojena serijski u strujni krug. Jouleova snaga veća je 8 % na otporniku s* $10\ \Omega$ *većim otporom. Odredi otpor oba otpornika.*

Rješenje. Pošto su otpornici spojeni serijski, vrijedi $I_1 = I_2 = I$, a snagu možemo izraziti pomoću struje:

$$P_1 = I^2 R_1, \quad P_2 = I^2 R_2.$$

Ako otpornik 2 ima $10\ \Omega$ veći otpor, i jouleova snaga je 8 % veća, u drugu jednadžbu uvrstimo $R_2 = R_1 + 10$ i $P_2 = P_1 \cdot 1.08$:

$$1.08 P_1 = I^2 (R_1 + 10),$$
$$P_1 = I^2 R_1.$$

Uvrštavanjem P_1 i skraćivanjem s I^2 dobijemo

$$1.08 R_1 = R_1 + 10\ \Omega,$$
$$R_1 = \frac{10\ \Omega}{1.08 - 1} = 125\ \Omega,$$
$$R_2 = R_1 + 10\ \Omega = 135\ \Omega.$$

Borna Gojšić (2), Karlovac

1713. *Ionski izvor akceleratora protona daje struju* $100\ \mu A$. *Akcelerator ubrzava protone do kinetičke energije 150 keV. Kolika je snaga snopa? Koliko iona u sekundi daje snop?*

Rješenje. Snagu odredimo iz umnoška struje i ubrzavajućeg napona,

$$P = UI = 150\,000 \text{ V} \cdot 0.0001 \text{ A} = 15 \text{ W}.$$

Uz navedenu struju u sekundi prođe 0.0001 Coulomba naboja. Kako protoni imaju jedinični pozitivni naboj iznosa $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, broj čestica u sekundi je

$$\Delta N = \frac{\Delta Q}{e} = \frac{0.0001}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 6.25 \cdot 10^{14}.$$

Ur.