O jednoj algebarskoj nejednakosti

U MFL-u br. LXIX, 3 (2018./2019.), na str. 193, postavljen je zadatak:

Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant ab+bc+ca. \tag{1}$$

Prikazat ćemo najprije tri dokaza jače nejednakosti

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant a^2+\ b^2+\ c^2, \tag{2}$$

a nakon toga i općenitiju nejednakost

$$\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}+\frac{b^{2n+1}}{c^{2n-1}}+\frac{c^{2n+1}}{a^{2n-1}}\geqslant a^2+b^2+c^2, \tag{3}$$

gdje je n prirodan broj.

Rješenje 1. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo

$$\frac{a^3}{b}+ab\geqslant 2\sqrt{\frac{a^3}{b}\cdot ab}=2a^2.$$

Analogno dobijemo

$$\frac{b^3}{c}+bc\geqslant 2b^2 \quad \text{i} \quad \frac{c^3}{a}+ca\geqslant 2c^2.$$

Nakon zbrajanja ove tri nejednakosti imamo

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\geqslant 2(a^2+b^2+c^2),$$

tj.

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca). \tag{4}$$

Očita nejednakost $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$ je ekvivalentna s

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca, \tag{5}$$

pa iz (4) slijedi (2).

Rješenje 2. Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{a^3}{b}+ab+a^2\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\cdot ab\cdot a^2}=3a^2$$

i analogno

$$\frac{b^3}{c}+bc+b^2\geqslant 3b^2 \quad \text{i} \quad \frac{c^3}{a}+ca+c^2\geqslant 3c^2.$$

Odavde i (5) dobivamo (2).

Rješenje 3. U MFL-u br. LXIV, 4 (2013./2014.), na str. 238, dokazana je nejednakost za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \tag{6}$$

Ako u (6) umjesto a, b, c, x, y, z stavimo redom a^2, b^2, c^2, ab, bc, ca, dobijemo

$$\frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}=(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Odavde, radi (5), slijedi

$$\frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca}\geqslant(a^2+b^2+c^2)\cdot 1,$$

što je ekvivalentno s (2).

Sada dokažimo i nejednakost (3).

Rješenje. Korištenjem ideje iz rješenja 2, imamo za $n+1$ pozitivnih brojeva:

$$\begin{aligned}\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}+ab+b^2+b^2+\ldots+b^2&\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}\cdot ab\cdot b^2\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2}\\&=(n+1)a^2,\\\frac{b^{2n+1}}{c^{2n-1}}+bc+c^2+c^2+\ldots+c^2&\geqslant(n+1)b^2,\\\frac{c^{2n+1}}{a^{2n-1}}+ca+a^2+a^2+\ldots+a^a&\geqslant(n+1)c^2.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ove tri nejednakosti dobivamo

$$\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}+\frac{b^{2n+1}}{c^{2n-1}}+\frac{c^{2n+1}}{a^{2n-1}}+ab+bc+ca+(n-1)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(n+1)(a^2+b^2+c^2),$$

tj.

$$\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}+\frac{b^{2n+1}}{c^{2n-1}}+\frac{c^{2n+1}}{a^{2n-1}}\geqslant 2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca). \tag{7}$$

Konačno, iz (7) i (5) dobivamo (3).

Napomena 1. Jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$, $n=1$.

Napomena 2. Specijalno, za $n=1$ iz (3) slijedi (2).

Napomena 3. Radi (5), je (2) jače od (1).

Dragoljub Milošević