Rješenje nagradnog natječaja br. 228

Nađi sve trojke (m, n, p) pozitivnih cijelih brojeva takvih da je $m+n+p=2012$ i da sustav jednadžbi

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=m, \qquad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}=n, \qquad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=p$$

ima bar jedno realno rješenje.

Rješenje. Zadatak se rješava upotpunjenjem do kvadrata. Imamo:

$$\begin{aligned} mnp &= 1+\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+1 \\ &= \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)^2-4. \end{aligned}$$

Dakle,

$$m^2+n^2+p^2=mnp+4.$$

Dodavanjem $2(mn+np+pm)$ na obje strane dobivamo

$$(m+n+p)^2=mnp+2(mn+np+pm)+4.$$

Dodajući sada $4(m+n+p)+4$ na obje strane imamo

$$(m+n+p+2)^2=(m+2)(n+2)(p+2).$$

Sada je

$$(m+2)(n+2)(p+2)=2014^2=4\cdot 1007\cdot 1007.$$

Ako uzmemo $m \leq n \leq p$ dobivamo $m=2$, $n=p=1005$.

Za $m=2$ iz prve jednadžbe dobivamo $x=y$. Za $n=p=1005$ imamo kvadratnu jednadžbu

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2-1005\left(\frac{x}{z}\right)+1=0.$$

Kako je njezina diskriminanta pozitivna, jednadžba ima realna rješenja.

Knjigom Darko Veljan, *Kombinatorika i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001. nagrađena je *Hanka Goralija* (3), Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH.

Riješili zadatke iz br. 1/277

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Borna Cesarec* (2), Srednja škola Krapina, Krapina, 3716; *Borna Gojšić* (2), Gimnazija Karlovac, Karlovac, 3707–3710, 3714, 3715, 3720; *Oliver Kukas* (3), Gimnazija A. G. Matoša, Zabok, 3707–3720; *Filip Vučić* (1), XV. gimnazija, Zagreb, 3707, 3717, 3718.

b) Iz fizike: *Antonija Glasnović* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 458–461; *Porin Kotnik* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 458–461; *Borna Cesarec* (2), Srednja škola Krapina, Krapina, 1708, 1709; *Borna Gojšić* (1), Gimnazija Karlovac, Karlovac, 1708, 1709, 1712.