Određivanje polinoma kroz zadane točke

Josip Matejaš [1], *Valentina Šimić* [2]

U radu prikazujemo neke metode određivanja polinoma direktno iz zadanih točaka kroz koje graf polinoma prolazi.

Uvod

U današnje vrijeme sve veće užurbanosti životnog tempa, izloženi smo i prisiljeni raspolagati sa sve većim brojem informacija i podataka iz različitih izvora. Na temelju raspoloživih podataka trebamo donositi određene odluke i procjene za postupke i događaje u budućnosti. Tako na primjer, na temelju cijena i potražnji roba želimo predvidjeti buduće kretanje cijena, roba i prihoda na tržištu, na temelju vremena (temperatura, vjetra, oborina) u zadnjih nekoliko dana želimo predvidjeti vrijeme u sljedećim danima itd. Dakle, vrlo često javlja se potreba opisivanja cjelovite pojave na temelju poznatih podataka (fragmenata). Izraženo matematički, na temelju poznatih točaka, želimo odrediti funkciju čiji graf prolazi tim točkama, a čime je definiran problem *interpolacije*. Interpolacija je samo specijalni slučaj problema *aproksimacije* u kome određujemo funkciju čiji graf aproksimira zadane točke pri čemu ne mora nužno njima prolaziti. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 1. *U jednom trgovačkom centru stavljen je na prodaju novi proizvod po cijeni od 120 kuna po komadu. Po toj cijeni tokom tjedan dana prodano je 1280 proizvoda. Sljedeći tjedan proizvod je stavljen na akciju po cijeni od 110 kuna pa je kroz tjedan prodano 1620 komada. Treći tjedan uvedena je super akcija po cijeni od 100 kuna po kojoj je tokom tjedna prodano 2000 proizvoda. Koliku tjednu prodaju tog proizvoda možemo očekivati ako je cijena 95, 105, 115 odnosno 125 kuna po komadu?*

Radi se o klasičnom primjeru interpolacije. Na temelju zadanih podataka pokušat ćemo odrediti funkciju prodaje (potražnje) tog proizvoda, a tražene količine dobit ćemo uvrštavanjem zadanih cijena u tako dobivenu funkciju.

Osnovni teorem interpolacije

Ako poopćimo primjer 1 dobivamo sljedeći, općeniti problem interpolacije.

Za zadane točke (x_k, f_k), $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ *odrediti funkciju* $f(x)$ *za koju vrijedi* $f(x_k) = f_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

[1] Profesor na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu; e-pošta: `jmatejas@efzg.hr`

[2] Studentica i demonstratorica na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu; e-pošta: `valentina.simic13@gmail.com`.

Imamo dakle zadanu $n+1$ točku (n je prirodni broj ili nula) koje nazivamo *čvorovi interpolacije* a fukciju f, *interpolacijska funkcija* kroz zadane čvorove. Postavlja se pitanje odabira tipa interpolacijske funkcije, a što ovisi o prirodi promatranog problema i potrebi za relativno jednostavnim i numerički stabilnim računanjem vrijednosti funkcije. Kako su polinomi najjednostavnije funkcije, a poznato je da se gotovo sve funkcije mogu dobro aproksimirati pomoću njih (Taylorovi polinomi), odabrat ćemo ih za problem interpolacije. Time smo odabrali tip interpolacijske funkcije. Sljedeće je pitanje *egzistencije* i *jedinstvenosti*: da li postoji polinom koji prolazi zadanim točkama i ako postoji, da li je jedinstven? Odgovor je sljedeći.

Teorem 1 (osnovni teorem interpolacije). *Za zadane točke (x_k,f_k), $k=0,1,2,\ldots,n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ postoji jedinstven polinom stupnja najviše n, $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ za koji vrijedi $p(x_k)=f_k$, $k=0,1,2,\ldots,n$.*

Dokaz. Uvrštavanjem vrijednosti $x_0,x_1,\ldots,x_n$ u polinom $p(x)$ dobivamo sustav od $n+1$ jednadžbe s $n+1$ nepoznanicom $a_0,a_1,\ldots,a_n$,

$$a_0+a_1x_k+a_2x_k^2+a_3x_k^3+\cdots+a_nx_k^n=f_k, \quad k=0,1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Ovaj sustav će imati jedinstveno rješenje ako je matrica sustava regularna, tj. ako je njena determinanta različita od nule. Determinanta ovog sustava je poznata pod nazivom Vandermondeova determinata,

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

Tako je

$$V_1=\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}=x_1-x_0,$$

$$V_2=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1),\ldots$$

Kako su točke međusobno različite ($x_i \neq x_j$ za $i \neq j$), slijedi $V_n \neq 0$ pa sustav ima jedinstveno rješenje. □

Teorem 1 rješava pitanje egzistencije i jedinstvenosti traženog interpolacijskog polinoma. Tako u primjeru 1, gdje imamo zadane $n+1=3$ točke: $(120,1280)$, $(110,1620)$ i $(100,2000)$, sustav (1) glasi

$$\begin{aligned} a_0+120a_1+14\,400a_2&=1280 \\ a_0+110a_1+12\,100a_2&=1620 \\ a_0+100a_1+10\,000a_2&=2000, \end{aligned}$$

čije je rješenje $a_0=8000$, $a_1=-80$, $a_2=0.2$, pa je interpolacijski polinom

$$p(x)=8000-80x+0.2x^2. \tag{2}$$

Prirodno se nameće praktično, operativno pitanje: kako polinom (njegove koeficijente) što jednostavnije odrediti pomoću zadanih točaka? Vidimo da, ako direktno rješavamo sustav (1) nekom od metoda za rješavanje linearnih sustava, postupak može biti složen, pa i numerički nestabilan, za veće vrijednosti od n. Osim toga, dodavanjem nove točke zadanima, postupak rješavanja treba ponoviti od početka. Zbog toga ćemo se u nastavku upoznati s jednostavnijim metodama određivanja koeficijenata interpolacijskog polinoma, direktno iz zadanih točaka. Osnovna ideja je da se polinom zapiše u prikladno odabranoj bazi. Naime, polinom $p(x)$ u iskazu teorema 1 zapisan je u standardnoj bazi vektorskog prostora polinoma stupnja najviše n, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. U nekoj drugoj bazi zapis je posve drukčiji, na primjer

$$\begin{aligned} p(x) &= 15 + 7x + x^2 \quad \ldots \quad \text{baza} \;=\; \{1, x, x^2\} \\ &= 5 + 3(x+2) + (x+2)^2 \quad \ldots \quad \text{baza} \;=\; \{1, x+2, (x+2)^2\} \\ &= 8 + 6(x+1) + (x^2 + x + 1) \quad \ldots \quad \text{baza} \;=\; \{1, x+1, x^2 + x + 1\} \\ &= 23 + 7(x-1) + (x^2 - 1) \quad \ldots \quad \text{baza} \;=\; \{1, x-1, x^2 - 1\}, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Na taj način možemo birati zapis koji je u konkretnoj situaciji najprikladniji.

Lagrangeov interpolacijski polinom

Neka su zadane točke kao u teoremu 1. Stavimo

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k), \qquad \omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Skup $\{\omega_k(x),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ je *Lagrangeova baza* u kojoj je zapis interpolacijskog polinoma iz teorema 1,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} f_k.$$

Naime, kako je na temelju same konstrukcije, $\omega_k(x_l) = 0$ za $l \neq k$, lako se vidi da ovako definirani polinom zadovoljava osnovni uvjet interpolacije $p(x_k) = f_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, a kako je prema teoremu 1 jedinstven, radi se o istom polinomu samo je zapisan u drugoj bazi. Tako u primjeru 1 imamo $\omega(x) = (x - 120)(x - 110)(x - 100)$, pa je

$$\begin{aligned} p(x) = {} & \frac{(x-110)(x-100)}{(120-110)(120-100)} \cdot 1280 + \frac{(x-120)(x-100)}{(110-120)(110-100)} \cdot 1620 \\ & + \frac{(x-120)(x-110)}{(120-100)(110-100)} \cdot 2000, \end{aligned}$$

dakle,

$$\begin{aligned} p(x) = {} & 6.4(x-110)(x-100) - 16.2(x-120)(x-100) \\ & + 10(x-120)(x-110). \end{aligned} \tag{3}$$

Primijetimo da bi sređivanjem oblika (3) dobili oblik (2), a što za praktičnu primjenu nije potrebno. Vidimo da ovdje ne treba rješavati sustav za određivanje koeficijenata polinoma, već se oni dobiju direktno pomoću čvorova interpolacije. Glavni nedostatak Lagrangeovog oblika polinoma je što se dodavanjem nove točke postupak treba ponoviti. U nastavku ćemo vidjeti kako se otklanja i ovaj nedostatak.

Newtonov interpolacijski polinom

Za zadane točke kao u teoremu 1, interpolacijski polinom zapisujemo u *Newtonovoj bazi*, $\{1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})\}$,

$$p(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + b_n(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}).$$

Iz zapisa vidimo da vrijednost polinoma $p(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ određuju samo koeficijenti $b_0, b_1, \ldots, b_k$ dok $b_{k+1}, \ldots, b_n$ na nju nemaju utjecaj. Tako redom za $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$, dobivamo

$$p(x_0) = f_0 \implies b_0 = f_0,$$

$$p(x_1) = f_1 \implies b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f_1 \implies b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0},$$

$$p(x_2) = f_2 \implies b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f_2$$

$$\implies b_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0},$$

$$p(x_3) = f_3 \implies \ldots \implies b_3 = \frac{\dfrac{\dfrac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} - \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} - \dfrac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0}, \quad \text{itd.}$$

Vidimo da su koeficijenti polinoma uzastopne *podijeljene razlike*, $b_k = f_{01\ldots k}$ (podijeljena razlika k-tog reda), gdje je

$$f_{i,i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad f_{i,i+1,i+2} = \frac{f_{i+1,i+2} - f_{i,i+1}}{x_{i+2} - x_i}, \ldots$$

ili općenito

$$f_{i,i+1,\ldots,j-1,j} = \frac{f_{i+1,\ldots,j-1,j} - f_{i,i+1,\ldots,j-1}}{x_j - x_i}, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Dakle, Newtonov interpolacijski polinom glasi

$$p(x) = f_0 + f_{01}(x-x_0) + f_{012}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f_{012\ldots n}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}).$$

Za pregledno računanje podijeljenih razlika možemo koristiti sljedeću shemu

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 & \to & f_0 & & & & \\
 & & & f_{01} & & & \\
x_1 & \to & f_1 & & f_{012} & & \\
 & & & f_{12} & & f_{0123} & \\
x_2 & \to & f_2 & & f_{123} & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots f_{012\ldots n} \\
x_{n-2} & \to & f_{n-2} & & f_{n-3,n-2,n-1} & & \\
 & & & f_{n-2,n-1} & & f_{n-3,n-2,n-1,n} & \\
x_{n-1} & \to & f_{n-1} & & f_{n-2,n-1,n} & & \\
 & & & f_{n-1,n} & & & \\
x_n & \to & f_n & & & &
\end{array}$$

Tako u primjeru 1 imamo

$$\begin{array}{ccccc}
120 & \rightarrow & 1280 & & \\
 & & & \dfrac{1620-1280}{110-120}=-34 & \\
110 & \rightarrow & 1620 & & \dfrac{(-38)-(-34)}{100-120}=0.2 \\
 & & & \dfrac{2000-1620}{100-110}=-38 & \\
100 & \rightarrow & 2000 & &
\end{array}$$

pa je interpolacijski polinom,

$$p(x)=1280-34(x-120)+0.2(x-120)(x-110). \tag{4}$$

Vidimo kako se iz zadanih čvorova interpolacije računanjem uzastopnih podijeljenih razlika dobivaju koeficijenti interpolacijskog polinoma. Glavna prednost ovog načina je da dodavanje novog čvora ne mijenja postojeću shemu računanja i polinom. Na kraju sheme samo se doda novi čvor, izračuna se novi red podijeljenih razlika te se polinomu doda novi član (korekcija). Tako u navedenom primjeru graf polinoma $p_0(x)=1280$ prolazi prvom točkom, graf polinoma $p_1(x)=1280-34(x-120)$ prolazi prvom i drugom točkom, dok graf polinoma $p(x)$ iz relacije (4) prolazi kroz sve tri točke.

Primjene

Kao što je već navedeno interpolacija ima široku praktičnu primjenu. Na temelju poznatih podataka interpolacijski polinom omogućuje nam procjenu kretanja promatrane pojave u trenutno nepoznatim ili nedostupnim uvjetima. To se posebno odnosi na razvoj pojave kroz prostor i/ili vrijeme. Tako u primjeru 1, koristeći bilo koji dobiveni oblik polinoma, (2), (3) ili (4), koji predstavlja očekivanu tjednu prodaju uz cijenu x, imamo

$$p(95)=2205, \quad p(105)=1805, \quad p(115)=1445, \quad p(125)=1125.$$

Navodimo još neke primjere.

Primjer 2. *Vrijednost godišnjeg izvoza jednog proizvodnog sektora u protekle tri godine bio je u konstantnom padu i iznosio je 10, 8 i 7 milijuna kuna. Napravljen je plan restrukturiranja kojim bi se za pet godina vrijednost godišnjeg izvoza podigla na 12 milijuna kuna. Uz koju izvoznu dinamiku tokom naredne četiri godine možemo očekivati ostvarenje postavljenog cilja?*

Numerirajmo protekle tri godine s -3, -2, -1, a predstojeće godine restrukturiranja s 0, 1, 2, 3, 4. Koristeći Newtonov interpolacijski polinom, imamo

$$\begin{array}{cccccc}
-3 & \rightarrow & 10 & & & \\
 & & & \dfrac{8-10}{(-2)-(-3)}=-2 & & \\
-2 & \rightarrow & 8 & & \dfrac{(-1)-(-2)}{(-1)-(-3)}=\dfrac{1}{2} & \\
 & & & \dfrac{7-8}{(-1)-(-2)}=-1 & & \dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{4-(-3)}=-\dfrac{1}{42} \\
-1 & \rightarrow & 7 & & \dfrac{1-(-1)}{4-(-2)}=\dfrac{1}{3} & \\
 & & & \dfrac{12-7}{4-(-1)}=1 & & \\
4 & \rightarrow & 12 & & &
\end{array}$$

dakle, $p(x) = 10 - 2(x+3) + \frac{1}{2}(x+3)(x+2) - \frac{1}{42}(x+3)(x+2)(x+1)$ je godišnji izvoz u godini x. Tražena izvozna dinamika je (rezultati zaokruženi na dvije decimale): $p(0) \approx 6.86$, $p(1) \approx 7.43$, $p(2) \approx 8.57$, $p(3) \approx 10.14$ milijuna kuna da bi se ostvario cilj $p(4) = 12$ milijuna kuna. Vidimo kako se trend pada izvoza može nastaviti i u prvoj godini ($x = 0$) provedbe plana samo treba biti znatno ublažen, u sljedećoj godini trebamo imati blagi rast koji se u narednoj godini pojačava, a u zadnje dvije godine dobiva puni zamah.

Primjer 3. *Na jednom naftnom tržištu prosječna dnevna prodaja sirove nafte bila je 105 000 barrela po cijeni 75 USD po barrelu (1 barrel = 159 litara). Nastankom političke krize cijena je povećana na 106.5 USD pa je prosječna dnevna prodaja pala na 73 500 barrela. Na kojoj razini cijene možemo očekivati najveći prihod od prodaje sirove nafte na tom tržištu?*

Za Lagrangeov interpolacijski polinom imamo $\omega(x) = (x-75)(x-106.5)$, gdje je x cijena, pa je funkcija prodaje

$$p(x) = \frac{x-106.5}{75-106.5} \cdot 105\,000 + \frac{x-75}{106.5-75} \cdot 73\,500 = -1000x + 180\,000.$$

Primijetimo da se radi o linearnom polinomu (jednadžba pravca kroz dvije točke). Budući da je prihod jednak umnošku prodane količine i cijene, vidimo da je prosječni dnevni prihod od prodaje bio $105\,000 \cdot 75 = 7\,875\,000$ USD, a nakon toga se smanjio na $73\,500 \cdot 106.5 = 7\,827\,750$ USD. Kako je, uz dobiveni polinom, funkcija prihoda

$$P(x) = p(x) \cdot x = -1000x^2 + 180\,000x,$$

njezin maksimum se postiže za $x = -180\,000/(-1000 \cdot 2) = 90$, jer kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima ekstrem (maksimum za $a < 0$, a minimum za $a > 0$) za $x = -b/(2a)$ (tjeme parabole). Dakle, uz cijenu od 90 USD po barrelu možemo očekivati prosječnu dnevnu prodaju $p(90) = 90\,000$ barela i najveći mogući prihod $P(90) = 90\,000 \cdot 90 = 8\,100\,000$ USD.

Čitatelji mogu po želji sami zadati nekoliko točaka, ili ih prikupiti mjerenjem, promatranjem, ispitivanjem i sl. (primarni izvori) odnosno koristiti objavljene podatke (sekundarni izvori), te odrediti interpolacijski polinom u obliku koji odaberu i iskoristiti ga za određene procjene, analize ili predviđanja. Ispravnost dobivenih rezultata lako se provjeri uvrštavanjem zadanih točaka.

Literatura

Kao literatura za ovaj rad korišteni su nastavni materijali iz kolegija *Numeričke metode u ekonomiji* koji se izvodi na integriranom studiju Ekonomskog fakulteta u Zagrebu. Općenito, literatura za ovo područje mogu biti pisani ili elektronički izvori koji u svom nazivu sadrže neke od sljedećih ključnih riječi: *interpolacija, numeričke metode, numerička matematika*. Naime, interpolacija je jedna od numeričkih metoda, a koje su glavni alat u numeričkoj matematici.