Vjerojatnosti u igri Jamb

Ljubica Baćić Đuračković[1], *Vojislav Đuračković*[2]

Kocka do kocke, kockica...

Prešavši rijeku Rubikon Julije Cezar i njegova 13. legija bili su osuđeni na smrt. Naime, zakon je branio prelazak rijeke Rubikon s namjerom zaštite opstojnosti Rima od vojnih diktatora. Navodno je tada Cezar izjavio *Alea iacta est*, odnosno, *Kocka je bačena*, što bi značilo da nema povratka te im predstoji ili pobjeda ili smrt.

Mnogo bolje se provodio bogati kanadski par, koji je 1954. godine na jahti s prijateljima bacao igraće kockice. Autorska prava njihove igre poželio je kupiti Edwin S. Lowe, kojem se igra svidjela i uočio je mogućnost zarade. To mu je pošlo za rukom, pa je prvobitni, *Yacht game* preimenovao u *Yahtzee*[3]. U početku je prodaja igre išla loše, ali se dosjetio popularizirati igru zabavama. Ubrzo je prodao preko četrdeset milijuna kopija igre. No, 1973. godine prodao je i autorska prava, a novi vlasnik Milton Bradley ih je prodao dalje već 1984. godine. Od tada je igra u vlasništvu američke multinacionalne tvrtke Hasbro koja proizvodi igračke i igre na pločama. Tvrtka se danas može pohvaliti prodajom igre u pedeset milijuna primjeraka godišnje diljem svijeta.

Očigledno im naša reklama nije potrebna. Što onda ima za nas zanimljivo u ovoj igri? Za igru Jamb potrebno je pet igraćih kockica i listići s tablicom za upisivanje rezultata. S vremenom su se razvile različite varijante ove igre, ali svakoj je zajednički cilj postići najveći zbroj svih polja u tablici. Broj igrača je neograničen, ali obično se igra između dva i pet igrača. Svaki od njih ima svoju tablicu u koju upisuje ishode svojih bacanja igraćih kockica. Matematičari ovdje po prvi put ozbiljnije otvore oči, jer gdje ima ishoda ima i vjerojatnosti. Sada postaje jasnije zašto smo se raspisali o ovoj igri.

U varijanti nama dostupne igre tablica ima šesnaest redaka i četiri stupca. U prvih šest redaka upisuje se broj dobivenih jedinica, dvojki, trojki, četvorki, petica ili šestica. Cilj je dobiti što veći broj navedenih vrijednosti te tako ostvariti dodatne bodove u obliku bonusa. Mnogo zanimljiviji čini se donji dio tablice i polja dva para, mala ili velika skala, full, poker i jamb, koje ćemo posebno pojasniti u nastavku. Sva polja su raspoređena u četiri stupca, u koje se upisuju rezultati, po točno određenim pravilima. Upravo oni čine ovu igru tako zanimljivom. Napomenimo još kako u jednom krugu svaki igrač baca igraće kockice tri puta s mogućnošću zadržavanja pojedinih kockica ukoliko one doprinose vjerojatnijoj realizaciji željenog ishoda.

Kocke smo bacili, a za pobjedu osim sreće potrebna nam je i dobra strategija koju obično, kako smo već spomenuli, temeljimo na vjerojatnosti.

---

[1] Ljubica Baćić Đuračković, OŠ Nikole Andrića, Vukovar; e-pošta: `ljubica.bacic@skole.hr`

[2] Vojislav Đuračković, OŠ Negoslavci, Negoslavci: e-pošta: `vojislav.durackovic@skole.hr`

[3] engl. *Yahtzee*, njem. *Yatzy*, hrv. *Jamb* ili *Yamb*

Prvi matematički rezultati povezani s teorijom vjerojatnosti vezani su uz igre na sreću, a jedan od začetnika je talijanski liječnik Hieronimo Cardano. Godine 1663. objavljena je knjiga *Liber de Ludo Aleae*, a pretpostavlja se da ju je završio 1563. godine. Iz samog naziva knjige *Knjiga o igri kockom* dade se naslutiti kako se i sam Cardano prvo zanimao za vjerojatnosti realizacije različitih ishoda u igri s kockama. Više o ovim povijesnim detaljima možete potražiti na mrežnoj stranici u literaturi [1].

U nastavku ćemo se baviti vjerojatnošću različitih ishoda u igri Jamb, a preduvjet za to su nam kombinatorna prebrojavanja. Kako se koncept vjerojatnosti temelji na odnosu dijela i cjeline postavljaju se logična pitanja koliki je dio, odnosno kolika je cjelina.

Kada je riječ o kombinatornim prebrojavanjima, odnosno određivanju broja elemenata konačnog skupa, najčešće se spominju sljedeća tri matematička pojma: permutacije, kombinacije, varijacije. Svi ovi pojmovi razmatraju se u dva oblika, bez ponavljanja ili s ponavljanjem, ovisno o elementima promatranog skupa. Ukoliko među elementima promatranog skupa ima istovrsnih, obično je riječ o permutacijama, kombinacijama ili varijacijama s ponavljanjem. Permutacija skupa je broj različitih razmještaja elemenata tog skupa u niz, red.[4] Na koliko načina od n elemenata možemo odabrati njih k, $k \geq 0$, reći će nam kombinacije tog skupa. U pojedinoj literaturi spominju se varijacije skupa, a zapravo riječ je o broju r-permutacija n-članog skupa. Više o kombinatorici, prebrojavanjima ili pak o teoriji grafova možete potražiti u [2]. Mi ćemo sažeto u tablici 1 prikazati kako odrediti broj permutacija, kombinacija ili varijacija. U tu svrhu pretpostavit ćemo da je zadan skup od n elemenata te promatrati r-člane podskupove u slučaju kombinacija, odnosno r-permutacija n-članog skupa u slučaju varijacija. Također u slučaju permutacija s ponavljanjem pretpostavljamo da su n_1, n_2, $\ldots$, n_k elementi

	bez ponavljanja	s ponavljanjem
permutacije	$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$	$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
kombinacije	$C_n^r = \dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$	$\overline{C}_n^r = \dbinom{n+r-1}{r}$
varijacije	$V_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	$\overline{V}_n^r = n^r$

Tablica 1. Permutacije, kombinacije i varijacije.

Pitamo li se imamo li šanse u nekoj igri, zapravo nas zanima kolika je vjerojatnost realizacije nekog događaja te igre. Klasičan način računanja vjerojatnosti, koji se najranije spominje u osnovnoj školi, definira se kao kvocijent broja ishoda povoljnih za realizaciju nekog događaja i broja svih mogućih ishoda. Broj svih mogućih ishoda je kardinalni broj skupa svih mogućih ishoda ili prostora elementarnih događaja. Takav skup označavamo s Ω. U nastavku ćemo računati vjerojatnosti realizacije pojedinih događaja iz igre Jamb. Krajnji cilj nam je odrediti vjerojatnost postizanja jamba, odnosno ishoda koji se očituje s istim brojem na svih pet igraćih kockica.

[4] Formalno: Bijekcija skupa u samog sebe zove se još i permutacija tog skupa, [2].

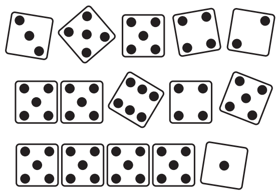
Jambom “preko Rubikona”[5]

Za početak postavimo problem koji nastojimo riješiti. Nakon prvog bacanja kockica, ostavljamo po strani one sa zajedničkim brojem, a u sljedeća dva bacanja pokušavamo dobiti isti broj. Dakle, cilj je dobiti jamb, odnosno isti broj na svih pet kockica. Kolika je vjerojatnost na ovakav način dobiti jamb?

prvo bacanje:

drugo bacanje:

treće bacanje:



Tablica 2. Ishodi bacanja kockica u tri pokušaja.

U tablici 2 prikazali smo ishode kockica u tri bacanja. Nakon prvog bacanja ostavljamo petice s ciljem postizanja jamba petica. Nakon drugog bacanja ostavljamo još jednu peticu. No, u trećem bacanju smo dobili samo još jednu peticu, a bile su potrebne dvije kako bi dobili jamb. Pozabavimo se sada vjerojatnostima.

Najprije odredimo prostor elementarnih događaja pri bacanju pet igraćih kockica. Riječ je o skupu uređenih petorki, koji matematički zapisujemo:

$$\Omega = \{(1,1,1,1,1), (1,1,1,1,2), \ldots, (6,6,6,6,6)\}.$$

Veličina skupa Ω, odnosno kardinalni broj tog skupa, u oznaci $card(\Omega)$, odgovara varijacijama s ponavljanjem, preciznije 5-permutacije 6-članog skupa. Vizualno to možemo predočiti na sljedeći način:

$$(\underline{\qquad}, \underline{\qquad}, \underline{\qquad}, \underline{\qquad}, \underline{\qquad})$$

6 mogućnosti 6 mogućnosti 6 mogućnosti 6 mogućnosti 6 mogućnosti

Dakle, veličina skupa Ω je:

$$card(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = \overline{V}_6^5 = 6^5 = 7776.$$

Vjerojatnost događaja “postignut je jamb”, koji ćemo predstaviti skupom

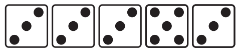
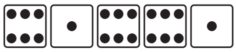
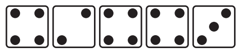
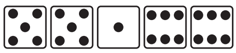
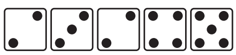
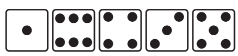
$$A = \{(1,1,1,1,1), (2,2,2,2,2), (3,3,3,3,3), (4,4,4,4,4), (5,5,5,5,5), (6,6,6,6,6)\},$$

računamo lako na sljedeći način:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card\ (\Omega)} = \frac{6}{6^5} = \frac{6}{7776} = \frac{1}{1296} \approx 0.0007716.$$

Vjerojatnost smo lako izračunali, a sada je očigledno zašto je ipak tako teško postići jamb. Mnogo češće je čak imati sve različite brojeve na kockicama, dvije iste, tri iste ili pak četiri iste od pet bačenih kockica. Kombinatornim prebrojavanjima najprije odredimo veličine ovih skupova.

[5] Izraz koji se pripisuje osobi koja donese neku važnu, sudbonosnu, odluku, [7].

oznaka	primjer	veličina skupa
4 – 1		$C_6^1 \cdot C_5^4 \cdot C_5^1$ $= \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{1} = 150$
3 – 2		$C_6^1 \cdot C_5^3 \cdot C_5^1$ $= \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{1} = 300$
3 – 1 – 1		$C_6^1 \cdot C_5^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1$ $= \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} = 1200$
2 – 2 – 1		$C_6^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_4^1$ $= \binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} = 1800$
2 – 1 – 1 – 1		$C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$ $= \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}$ $= 3600$
1 – 1 – 1 – 1 – 1		$C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1$ $= \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}$ $= 720$

Osim jamba bacanjem igraćih kockica možete dobiti poker, full, malu ili veliku skalu i dva para. Poker je naziv za događaj kada na samo četiri igraće kockice imamo isti broj, full pak predstavlja tri ista broja, ali i na druge dvije kockice se pojavio isti broj. Mala ili velika skala jeste niz od jedan do pet, odnosno od dva do šest koji je također moguće dobiti na kockicama. Još spomenimo i dva para, koji predstavlja po dva ista broja na po dvije kockice.

Pokušajte sami odrediti vjerojatnosti drugih događaja u ovoj igri. A ako vas računanje umori, prepustite se uživanju u igri Jamb.

Literatura

[1] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cardan.html`

[2] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Zagreb: Algoritam, 2001.

[3] `https://pixabay.com/en/cube-six-gambling-play-lucky-dice-689619/`

[4] `http://www.yahtzeeonline.org/yahtzee-history.php`

[5] `http://bitrak.org/tonimilun/Kombinatorika.pdf`

[6] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2014.

[7] `http://hjp.znanje.hr/index.php?show=search_by_id&id=eVZkWRg%3D`

[8] `http://www.math.cornell.edu/~mec/2006-2007/Probability/Yahtzee.pdf`