Elementarno određivanje ekstrema funkcije $y=(a_1x^2+b_1x+c_1)/(a_2x^2+b_2x+c_2)$

Dijana Ilišević[1], *Petra Lešković*[2]

Diferencijalni račun je moćan alat za određivanje ekstrema funkcija. No, kako odrediti ekstreme ako taj alat nemamo na raspolaganju? Postoje različite elementarne metode, a jedna od njih je pomoću slike zadane funkcije. Tu ćemo metodu ilustrirati na primjeru funkcije

$$y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}, \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

gdje su a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 realne konstante. Bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da se brojnik i nazivnik u (1) ne mogu skratiti te da zadana funkcija nije konstantna funkcija. Određivanje ekstrema funkcija ovog oblika svodi se na analizu kvadratne funkcije, pa je ovaj problem prikladan već i za učenike drugih razreda srednjih škola.

Prirodna domena zadane funkcije je $\{x\in\mathbb{R} : a_2x^2+b_2x+c_2\neq 0\}$. Odredimo njenu sliku, tj. skup svih mogućih vrijednosti koje y može poprimiti. Iz (1) slijedi

$$(a_1-a_2y)x^2+(b_1-b_2y)x+(c_1-c_2y)=0. \tag{2}$$

Skup svih mogućih vrijednosti za y jednak je skupu svih $y\in\mathbb{R}$ za koje jednadžba (2) ima rješenje po x. Uočimo da (2) ne može za rješenje dati neki x_0 koji nije u domeni zadane funkcije. Naime, u tom slučaju je $a_2x_0^2+b_2x_0+c_2=0$, pa (2) povlači $a_1x_0^2+b_1x_0+c_1=0$. No, tada se brojnik i nazivnik u (1) mogu skratiti (s $x-x_0$) suprotno pretpostavci.

Ako je $a_1-a_2y\neq 0$, jednadžba (2) je kvadratna, pa ima realno rješenje ako i samo ako joj je diskriminanta nenegativna, tj.

$$(b_1-b_2y)^2-4(a_1-a_2y)(c_1-c_2y)\geq 0. \tag{3}$$

Sređivanjem lijeve strane nejednakosti dobivamo

$$(b_2^2-4a_2c_2)y^2+(4a_1c_2+4a_2c_1-2b_1b_2)y+(b_1^2-4a_1c_1)\geq 0. \tag{4}$$

Ovaj uvjet kraće možemo zapisati u obliku

$$my^2+ny+r\geq 0, \tag{5}$$

gdje je $m=b_2^2-4a_2c_2$, $n=4a_1c_2+4a_2c_1-2b_1b_2$, $r=b_1^2-4a_1c_1$. Ako je $m=0$ i $n>0$, uvjet (5) postaje $y\geq -\frac{r}{n}$, tj. $y\in[p,+\infty\rangle$ za neki $p\in\mathbb{R}$. Ako je $m=0$ i $n<0$, tada analogno zaključujemo $y\in\langle-\infty,p]$ za neki $p\in\mathbb{R}$. Ako je $m=n=0$ i $r\geq 0$, (5) je istina za svaki $y\in\mathbb{R}$. Uočimo da slučaj $m=n=0$ i $r<0$ ne može nastupiti jer bi to značilo da funkcija (1) ne poprima niti jednu vrijednost. Ako je $m\neq 0$, nejednadžba (5) je kvadratna, pa skiciranjem grafa funkcije $y\longmapsto my^2+ny+r$ zaključujemo da je skup rješenja nejednadžbe (5) jednak $[p,q]$ za neke $p,q\in\mathbb{R}$ (ako je $m<0$ i $n^2-4mr>0$), $\langle-\infty,p]\cup[q,+\infty\rangle$ za neke $p,q\in\mathbb{R}$ (ako je $m>0$ i

[1] Redovita profesorica u trajnom zvanju na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

[2] Studentica matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

$n^2 - 4mr > 0$), ili je jednak skupu $\mathbb{R}$ (ako je $m > 0$ i $n^2 - 4mr = 0$). Ostali slučajevi ne mogu nastupiti.

Ako je $a_1 - a_2y = 0$, tada (2) ima rješenje ako i samo ako je $b_1 - b_2y \neq 0$ (slučaj $a_1 - a_2y = b_1 - b_2y = c_1 - c_2y = 0$ ne može nastupiti zbog pretpostavke da zadana funkcija nije konstantna). Napomenimo da se $y_0 \in \mathbb{R}$ koji je rješenje jednadžbe $a_1 - a_2y = 0$ dobiva i kao rješenje nejednadžbe (3). No, ako je $b_1 - b_2y_0 = 0$, tada y_0 nije u skupu svih $y \in \mathbb{R}$ za koje jednadžba (2) ima rješenje po x jer je $c_1 - c_2y_0 \neq 0$. Primijetimo da za takav y_0 u (3), pa onda i u (5), vrijedi jednakost, što znači da je y_0 jedan od brojeva p i q, tj. jedan od rubova dobivenih intervala. Kako jednadžba $a_1 - a_2y = 0$ ima samo jedno rješenje, jasno je da isključujemo samo jedan od rubova intervala.

Konačno zaključujemo kojeg oblika može biti skup svih mogućih vrijednosti koje y može poprimiti, a odatle lako odredimo ekstreme zadane funkcije:

- $\langle p, q]$ – funkcija ima maksimum q, a nema minumim,
- $[p, q\rangle$ – funkcija ima minimum p, a nema maksimum,
- $[p, q]$ – funkcija ima minimum p i maksimum q,
- $[p, +\infty\rangle$ – funkcija ima minimum p, a nema maksimum,
- $\langle -\infty, p]$ – funkcija ima maksimum p, a nema minimum,
- $\langle p, +\infty\rangle$ – funkcija nema ekstrema,
- $\langle -\infty, p\rangle$ – funkcija nema ekstrema,
- $\langle -\infty, p] \cup [q, +\infty\rangle$ – funkcija ima lokalni maksimum p i lokalni minimum q,
- $\langle -\infty, p\rangle \cup [q, +\infty\rangle$ – funkcija nema lokalni maksimum, ali ima lokalni minimum q,
- $\langle -\infty, p] \cup \langle q, +\infty\rangle$ – funkcija ima lokalni maksimum p, a nema lokalni minimum,
- $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ – funkcija nema ekstrema,
- $\mathbb{R}$ – funkcija nema ekstrema.

Primjerima pokažimo da se svi navedeni slučajevi mogu pojaviti. Svaki primjer ilustrirat ćemo grafom zadane funkcije.

Primjer 1. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}. \tag{6}$$

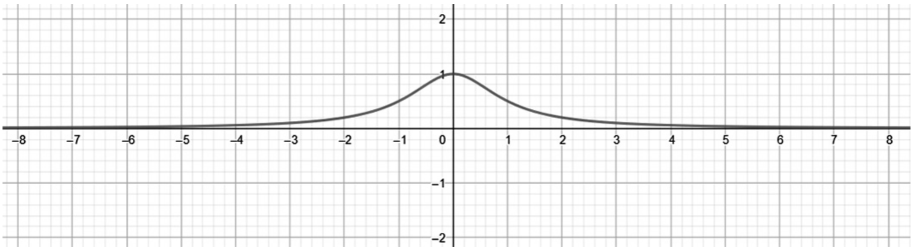
Rješenje. Iz (6) slijedi

$$x^2 = \frac{1 - y}{y}, \quad y \neq 0, \tag{7}$$

a ta jednadžba ima realno rješenje ako i samo ako je desna strana nenegativna.

$$\frac{1 - y}{y} \geq 0, \quad y \neq 0 \iff (1 - y)y \geq 0, \quad y \neq 0 \iff y \in \langle 0, 1].$$

Dakle, skup svih $y \in \mathbb{R}$ za koje jednadžba (7) ima rješenje po x je skup $\langle 0, 1]$, što znači da zadana funkcija ima maksimum 1 i nema minimum.



Primjer 2. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + x + 1}. \tag{8}$$

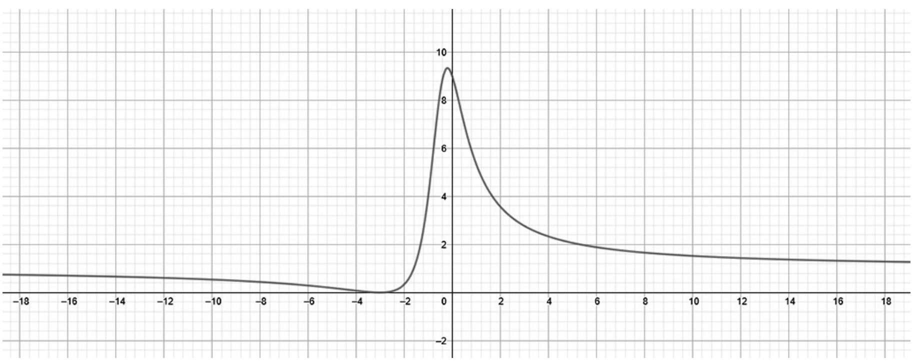
Rješenje. Iz (8) slijedi

$$(y - 1)x^2 + (y - 6)x + (y - 9) = 0. \tag{9}$$

Ako je $y \neq 1$, jednadžba (9) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (y-6)^2 - 4(y-1)(y-9) \geq 0 \iff -3y^2 + 28y \geq 0$$
$$\iff y(3y - 28) \leq 0 \iff y \in \left[0, \frac{28}{3}\right].$$

Za $y = 1$ dobivamo da jednadžba (9) također ima rješenje po x $\left(x = -\frac{8}{5}\right)$. Dakle, za svaki $y \in \left[0, \frac{28}{3}\right]$ jednadžba (9) ima rješenje po x. Iz toga zaključujemo da zadana funkcija ima minimum 0 i maksimum $\frac{28}{3}$.



Primjer 3. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 1}. \tag{10}$$

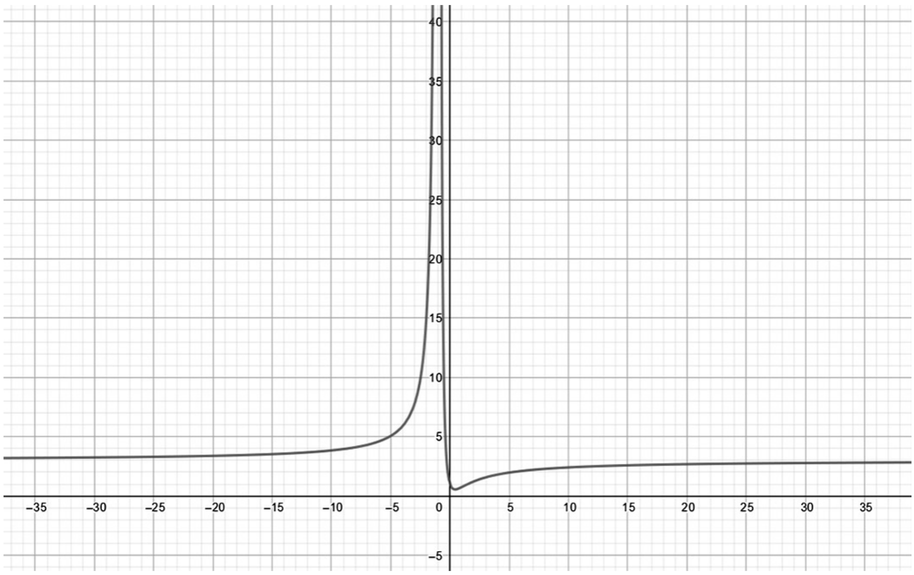
Rješenje. Iz (10) slijedi

$$(y - 3)x^2 + (2y + 1)x + (y - 1) = 0. \tag{11}$$

Ako je $y \neq 3$, jednadžba (11) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (2y+1)^2 - 4(y-3)(y-1) \geq 0 \iff 20y - 11 \geq 0$$
$$\iff y \geq \frac{11}{20} \iff y \in \left[\frac{11}{20}, +\infty\right\rangle.$$

Za $y = 3$ jednadžba (11) je linearna i također ima rješenje po x $\left(x = -\frac{2}{7}\right)$. Iz toga zaključujemo da jednadžba (11) ima rješenje po x za svaki $y \in \left[\frac{11}{20}, +\infty\right\rangle$, što znači da zadana funkcija ima minimum $\frac{11}{20}$, a nema maksimum.



Primjer 4. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{3x^2 + 4x}{9x^2 + 12x + 4}. \tag{12}$$

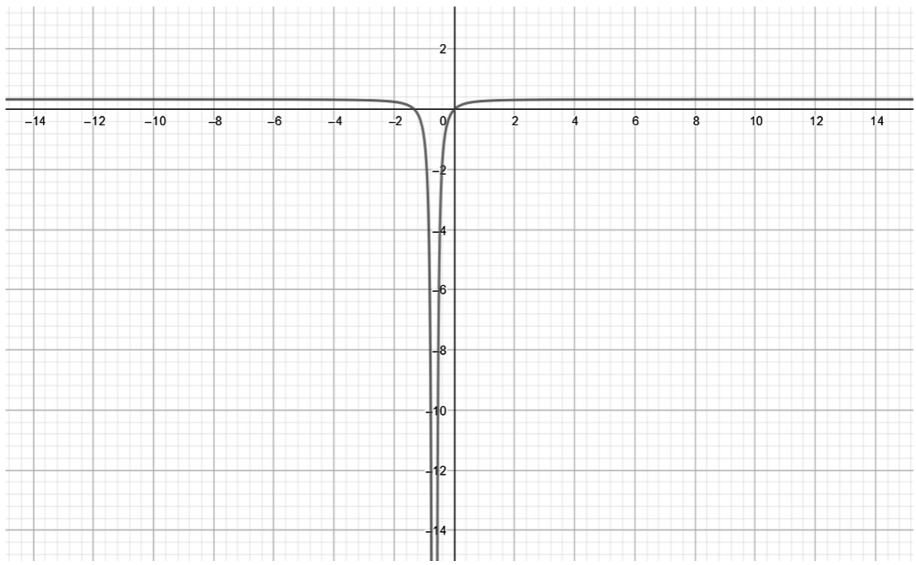
Rješenje. Iz (12) slijedi

$$(9y-3)x^2 + (12y-4)x + 4y = 0. \tag{13}$$

Ako je $y \neq \frac{1}{3}$, jednadžba (13) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (12y-4)^2 - 4(9y-3)4y \geq 0 \iff -48y + 16 \geq 0$$
$$\iff y \leq \frac{1}{3} \iff y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{3}\right].$$

Uvrstimo li $y = \frac{1}{3}$ u jednadžbu (13), imamo $\frac{4}{3} = 0$, pa zaključujemo da (13) nema rješenje po x za $y = \frac{1}{3}$. Dakle, zadana jednadžba ima rješenje po x ako i samo ako je $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{3} \right\rangle$, a to znači da zadana funkcija nema ekstrema.



Primjer 5. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x - 4}. \tag{14}$$

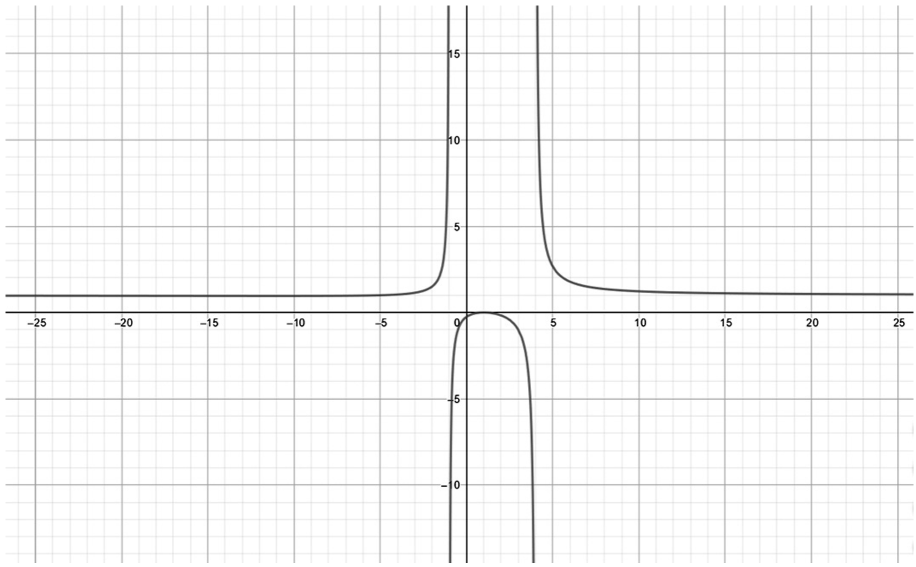
Rješenje. Iz (14) slijedi

$$(y-1)x^2 - (3y-2)x - (4y+1) = 0. \tag{15}$$

Ako je $y \neq 1$, jednadžba (15) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (3y-2)^2 + 4(y-1)(4y+1) \geq 0 \iff 25y^2 - 24y \geq 0$$
$$\iff y(25y - 24) \geq 0 \iff y \in \langle -\infty, 0] \bigcup \left[\frac{24}{25}, +\infty\right\rangle.$$

Za $y = 1$ iz jednadžbe (15) dobivamo $x = -5$, odnosno jednadžba ima rješenje po x. Prema tome, jednadžba (15) ima rješenje po x za svaki $y \in \langle -\infty, 0] \bigcup \left[\frac{24}{25}, +\infty\right\rangle$, što znači da zadana funkcija ima lokalni maksimum 0 i lokalni minimum $\frac{24}{25}$.



Primjer 6. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 4x - 6}. \tag{16}$$

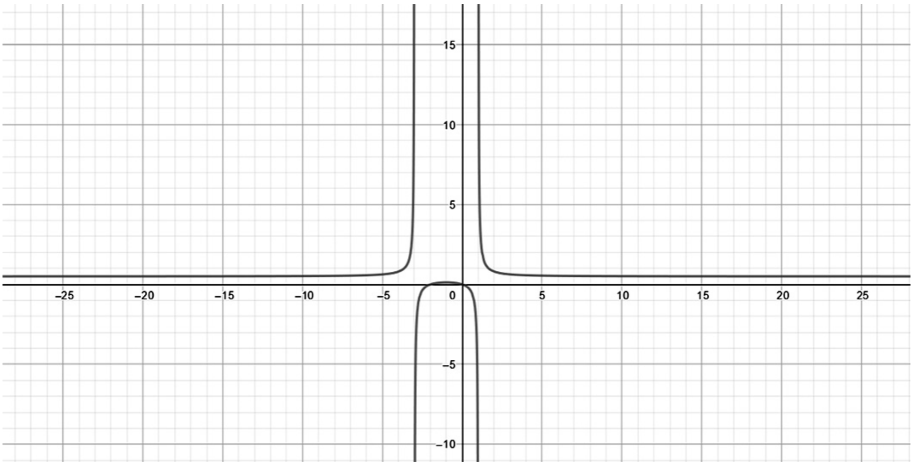
Rješenje. Iz (16) slijedi

$$(2y - 1)x^2 + (4y - 2)x - 6y = 0. \tag{17}$$

Ako je $y \neq \frac{1}{2}$, jednadžba (17) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (4y - 2)^2 + 4(2y - 1)6y \geq 0 \iff 64y^2 - 40y + 4 \geq 0. \tag{18}$$

Rješenja jednadžbe $64y^2 - 40y + 4 = 0$ su $y_{1,2} = \frac{40 \pm 24}{128}$, odnosno $y_1 = \frac{1}{8}$ i $y_2 = \frac{1}{2}$, pa slijedi da je $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{8} \right] \bigcup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ rješenje nejednadžbe (18). Kako za $y = \frac{1}{2}$ iz (17) dobivamo $-3 = 0$, zaključujemo da jednadžba (17) ima rješenje po x za sve $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{8} \right] \bigcup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$. Iz toga slijedi da zadana funkcija ima lokalni maksimum $\frac{1}{8}$, a nema lokalni minimum.



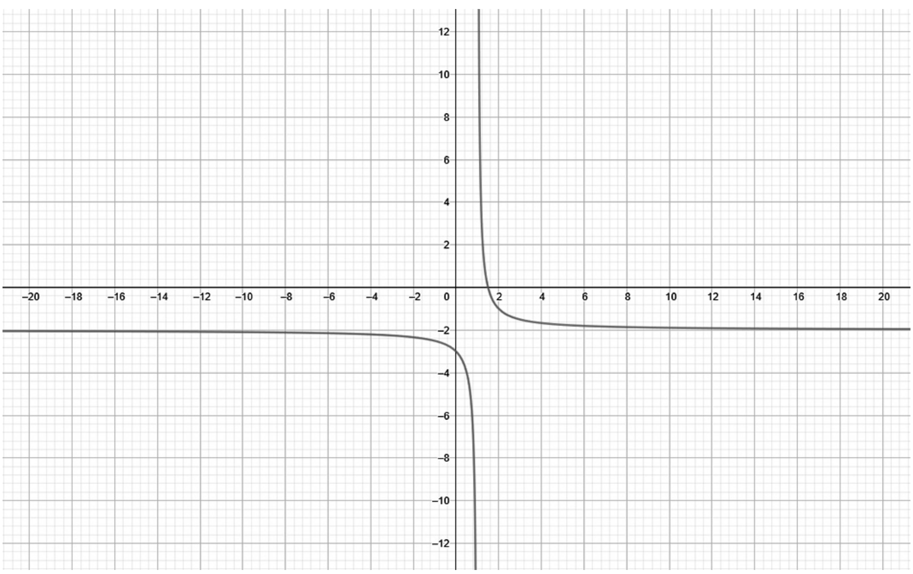
Primjer 7. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{-2x+3}{x-1}. \tag{19}$$

Rješenje. Iz (19) slijedi

$$(y+2)x - (y+3) = 0 \iff x = \frac{y+3}{y+2}, \quad y \neq -2. \tag{20}$$

Dakle, jednadžba (20) ima rješenje po x za sve $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, iz čega slijedi da zadana funkcija nema ekstrema.



Primjer 8. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{3x}{4x^2 - 9}. \tag{21}$$

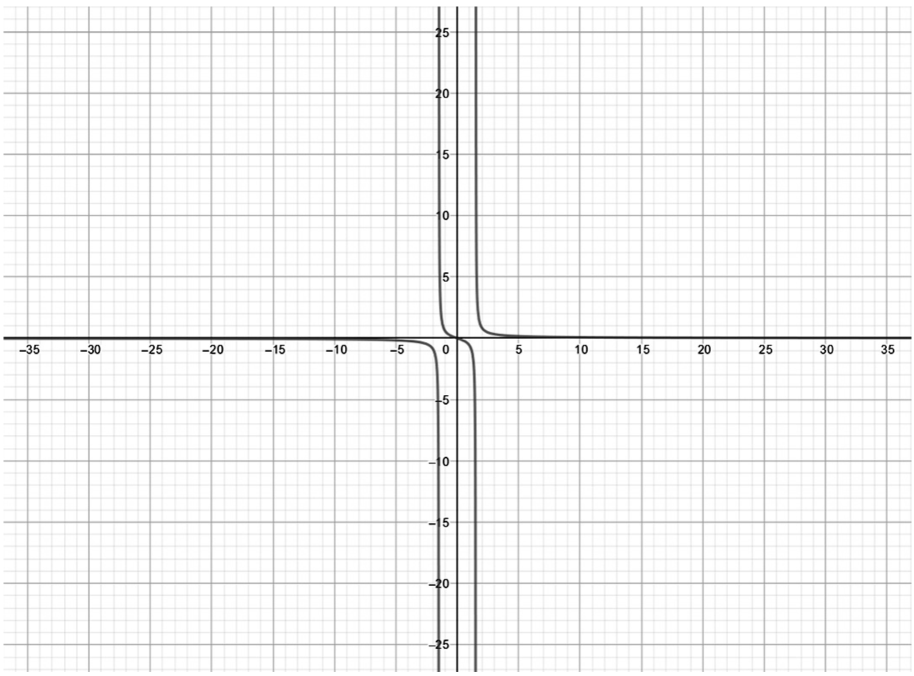
Rješenje. Iz (21) slijedi

$$4yx^2 - 3x - 9y = 0. \tag{22}$$

Za $y \neq 0$ jednadžba (22) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (-3)^2 - 4 \cdot 4y(-9y) \geq 0 \iff 144y^2 + 9 \geq 0 \iff y^2 \geq -\frac{9}{144} \iff y \in \mathbb{R}.$$

Za $y = 0$ jednadžba (22) nije kvadratna, već linearna, ali također ima rješenje po x ($x = 0$). Dakle, jednadžba (22) ima rješenje po x za svaki $y \in \mathbb{R}$, što znači da zadana funkcija nema ekstrema.



Preostali slučajevi se mogu dobiti ako u prvom, trećem, četvrtom i šestom primjeru umjesto y promatramo $-y$.

Na kraju napomenimo da se ovom metodom mogu odrediti i ekstremi funkcija nekih drugih oblika koje se supstitucijom svode na (1).

Literatura

[1] Miodrag Ivović, *Ekstremne vrednosti funkcija*, KMM "Arhimedes", Beograd, 1995.