Jedna algebarska nejednakost i njena primjena

Belma Alihodžić[1], *Šefket Arslanagić*[2]

U ovom članku ćemo promatrati sljedeću algebarsku nejednakost:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \quad x,\ y>0. \tag{1}$$

Najprije ćemo dati njena dva dokaza.

Dokaz 1. Imamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \\ \Longleftrightarrow\ & (x+y)^2 \geq 4xy \\ \Longleftrightarrow\ & x^2-2xy+y^2 \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (x-y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

što je točno pa je točna i dana nejednakost (1). Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $x=y$.

Dokaz 2. Koristit ćemo nejednkakost između aritmetičke i harmonijske sredine za dva pozitivna broja x i y:

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}},$$

a odavde

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4,$$

odnosno

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Nejednakost (1) ima veliku primjenu kod dokazivanja raznih algebarskih i geometrijskih nejednakosti.

Dat ćemo sada više takvih primjera.

[1] Autorica je magistra matematičkih znanosti i profesorica matematike u Prvoj bošnjačkoj gimnaziji u Sarajevu; e-pošta: `balihodzic@gmail.com`

[2] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Primjer 1. Dokazati nejednakost:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d},\quad a,\ b,\ c,\ d>0. \tag{2}$$

Dokaz. Iz nejednakosti (1) slijede nejednakosti:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}, \tag{3}$$

$$\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{16}{a+b+c}, \tag{4}$$

$$\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}=16\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{d}\right)\geq\frac{64}{a+b+c+d}. \tag{5}$$

Zbrajanjem nejednakosti (3), (4) i (5), dobivamo:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\geq\frac{4}{a+b}+\frac{16}{a+b+c}+\frac{64}{a+b+c+d},$$

a odavde:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Znak jednakosti u danoj nejednakosti (2) vrijedi ako znak jednakosti vrijedi i u (3), (4) i (5), tj. ako je $a=b$, $c=a+b$ i $d=a+b+c$, tj. $b=a$, $c=2a$, $d=4a$.

Primjer 2. Dokazati nejednakost:

$$(x^2+y^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\geq 8,\quad x,\ y>0. \tag{6}$$

Rješenje. Iz nejednakosti (1) imamo:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\geq\left(\frac{4}{x+y}\right)^2. \tag{7}$$

Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost:

$$\left(\frac{4}{x+y}\right)^2\geq\frac{8}{x^2+y^2}\ \ /\ :8 \tag{8}$$

$$\iff \frac{2}{(x+y)^2}\geq\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\iff 2(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$$

$$\iff (x-y)^2\geq 0,$$

što je točno.

Sada iz (7) i (8) slijedi (6).

Jednakost u (6) vrijedi ako i samo ako je $x=y$.

Primjer 3. Dokazati nejednakost:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{8}{x+y+2}, \quad x,\ y>0. \tag{9}$$

Rješenje. Iz nejednakosti (1) imamo:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}. \tag{10}$$

Dokazat ćemo nejednakost:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq \frac{8}{x+y+2} \ \ / \ :4 \\ \iff\ & \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq \frac{2}{x+y+2} \\ \iff\ & x+y+2 \geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \ \ / \ ^2 \\ \iff\ & (x+y)^2+4(x+y)+4 \geq 4(x+y+2\sqrt{xy}) \\ \iff\ & (x+y)^2+4 \geq 8\sqrt{xy}. \end{aligned} \tag{11}$$

Zbog $(x+y)^2 \geq 4xy$ ($\iff$ $(x-y)^2 \geq 0$), imamo

$$(x+y)^2+4 \geq 4xy+4.$$

Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost:

$$\begin{aligned} & 4xy+4 \geq 8\sqrt{xy} \ \ / \ :4 \\ \iff\ & xy-2\sqrt{xy}+1 \geq 0 \\ \iff\ & (\sqrt{xy}-1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

što je točno.

Sada iz (10) i (11) slijedi (9).

Jednakost u (9) vrijedi ako i samo ako je $x=y=1$.

Primjer 4. Dokazati nejednakost:

$$\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{2y+x}+\frac{(x+y)^2}{12} \geq 1, \quad x,\ y>0. \tag{12}$$

Rješenje. Iz (1) dobivamo

$$\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{2y+x} \geq \frac{4}{3(x+y)}. \tag{13}$$

Iz (13) imamo

$$\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{2y+x}+\frac{(x+y)^2}{12} \geq \frac{4}{3(x+y)}+\frac{(x+y)^2}{12}.$$

Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$\frac{4}{3(x+y)}+\frac{(x+y)^2}{12} \geq 1 \tag{14}$$

ili supstitucijom $x+y=t$:

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{3t}+\frac{t^2}{12}\geq 1\\
\iff\ & t^3-12t+16\geq 0\\
\iff\ & t^3-4t-8t+16\geq 0\\
\iff\ & t(t^2-4)-8(t-2)\geq 0\\
\iff\ & (t-2)(t^2+2t-8)\geq 8\\
\iff\ & (t-2)^2(t+4)\geq 0,
\end{aligned}$$

što je točno.

Sada iz (13) i (14) dobivamo (12).

Jednakost u (12) vrijedi ako i samo ako je $t=2$, tj. $x+y=2$ i $x=y$, a odavde slijedi $x=y=1$.

Primjer 5. Neka je $\alpha=120^\circ$ u trokutu ABC. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geq 4. \tag{15}$$

Rješenje. Slijedi iz nejednakosti (1):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geq \frac{4}{\sin\beta+\sin\gamma}&=\frac{4}{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}\\
&=\frac{2}{\sin\left(90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{2}{\sin 30^\circ\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}\\
&=\frac{4}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}\geq 4,
\end{aligned}$$

(jer je $0<\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}\leq 1$).

Jednakost u (15) vrijedi ako i samo ako je $\beta=\gamma=30^\circ$.

Primjer 6. Dokazati da za trokut ABC vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \tag{16}$$

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti uzet ćemo $a\geq b\geq c$. Iz (1) imamo:

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{4}{2c}=\frac{2}{c},$$

a odavde:

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{2}{c}+\frac{1}{a+b-c}. \tag{17}$$

Dokazat ćemo nejednakost:

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{c}+\frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} && (18)\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{2(a+b-c)+c}{c(a+b-c)} \geq \frac{ab+bc+ac}{abc} \ \ / \ \cdot abc(a+b-c) \\
\Longleftrightarrow\ & ab(2a+2b-c) \geq (a+b-c)(ab+bc+ac) \\
\Longleftrightarrow\ & 2a^2b+2ab^2-abc \geq a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc-abc-bc^2-ac^2 \\
\Longleftrightarrow\ & a^2b+ab^2 \geq 2abc+a^2c-ac^2+b^2c-bc^2 \\
\Longleftrightarrow\ & ab(a+b) \geq c(a+b)^2-c^2(a+b) \ \ / \ : (a+b) \\
\Longleftrightarrow\ & ab \geq c(a+b)-c^2 \\
\Longleftrightarrow\ & ab-ac-bc+c^2 \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a(b-c)-c(b-c) \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (a-c)(b-c) \geq 0,
\end{aligned}
$$

a ova nejednakost vrijedi zbog uvjeta $a \geq b \geq c$.

Iz (17) i (18) slijedi (16).

Jednakost u (16) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$ (jednakostranični trokut).

Primjer 7. Dokazati da za trokut ABC vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta} \geq \frac{8}{3+2\cos\gamma}, \tag{19}$$

gdje su α, β i γ unutarnji kutovi trokuta ABC.

Rješenje. Iz nejednakosti (1) imamo

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta} \geq \frac{4}{\sin\alpha+\sin\beta}. \tag{20}$$

Dokazat ćemo nejednakost:

$$
\begin{aligned}
& \frac{4}{\sin\alpha+\sin\beta} \geq \frac{2}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}} && (21)\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2} \leq \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \leq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-1\right) \leq 0,
\end{aligned}
$$

što je točno zbog $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-1 \leq 0$.

Iz (20) i (21) slijedi:

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\geq\frac{2}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{22}$$

Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\geq\frac{8}{3+2\cos\gamma} &(23)\\ \iff\ &\frac{1}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}\geq\frac{4}{3+2\cos\gamma}\\ \iff\ &3+2\cos\gamma\geq4\cos\frac{\gamma}{2}\\ \iff\ &3+2\left(2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1\right)-4\cos\frac{\gamma}{2}\geq0\\ \iff\ &4\cos^2\frac{\gamma}{2}-4\cos\frac{\gamma}{2}+1\geq0\\ \iff\ &\left(2\cos\frac{\gamma}{2}-1\right)^2\geq0, \end{aligned}$$

što je točno, pa vrijedi i nejednakost (23). Sada iz (22) i (23) slijedi (19).

Jednakost u (19) vrijedi ako i samo ako je $\alpha=\beta=30^\circ$ i $\gamma=120^\circ$.

Primjer 8. Dokazati nejednakost:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geq\frac{9}{2(a+b+c)},\quad a,\ b,\ c>0. \tag{24}$$

Rješenje. Najprije ćemo dokazati nejednakost

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geq\frac{9}{x+y},\quad x,\ y>0. \tag{25}$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geq\frac{9}{x+y}\ \ /\ \cdot xy(x+y)\\ \iff\ &y(x+y)+4x(x+y)\geq9xy\\ \iff\ &4x^2+y^2-4xy\geq0\\ \iff\ &(2x-y)^2\geq0, \end{aligned}$$

što je točno pa vrijedi i (25). Jednakost u (25) vrijedi ako i samo ako je $y=2x$.

Sada iz nejednakosti (1) i (25) slijedi:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geq\frac{4}{a+b+b+c}+\frac{1}{a+c}\geq\frac{9}{a+2b+c+a+c}$$
$$=\frac{9}{2\,(a+b+c)},$$

tj.

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Jednakost u (24) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Napomena 1. Važno je reći da se sve nejednakosti dane u ovim primjerima mogu dokazati i na neki drugi način, te preporučujemo čitateljima ovog članka da to pokušaju napraviti.

Napomena 2. Nejednakost (24) slijedi iz nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}}$$
$$\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geq\frac{9}{2(a+b+c)},$$

a ovo je dana nejednakost (24).

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] M. Chirciu, *Inegalitati geometrice*, Editura Paralela 45, Pitesti (Romania), 2015.

[3] M. S. Jovanović, D. Đ. Tošić, *Zbirka rešenih zadataka i problema iz matematike*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[4] N. M. Sedrakjan, A. M. Avojan, *Neravenstva – Metodi dokazateljstva*, Fizmatlit, Moskva, 2002.