ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2020. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $2/282$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 285.

A) Zadatci iz matematike

3749. Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

3750. Nađi sva cjelobrojna rješenja x, y jednadžbe

$$(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$$

različita od nule.

3751. Ako su a, b, x, y pozitivni brojevi, dokaži nejednakost

$$\frac{a^4}{x}+\frac{b^4}{y} \geq \frac{(a+b)^4}{4(x+y)}.$$

3752. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 + 3\log_{100x} 10 = 0,$$
$$x>0,\ x\neq 1.$$

3753. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$, M i N su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, tim redom, te $O = AC \cap BD$, a P i Q su ortogonalne projekcije od O na AD i BC. Dokaži $MN \parallel PQ$.

3754. Nad hipotenuzom $\overline{AB}$ i katetom $\overline{BC}$ pravokutnog trokuta ABC, s vanjske strane su konstruirani kvadrati $ABDE$ i $CBFG$. Dokaži da se pravci CE i AF sijeku na stranici kvadrata $CPQR$ upisanog u trokut ABC.

3755. Trapez $ABCD$ upisan je u kružnicu. Produžeci stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ sijeku se u točki M. Tangente na tu kružnicu u točkama B i D sijeku se u točki N. Dokaži $MN \parallel AB$.

3756. Nađi jednadžbu kružnice devet točaka trokuta ABC čiji su vrhovi $A(2,4)$, $B(4,6)$ i $C(6,6)$.

3757. Tetivi $\overline{AB}$ pripada trećina cijele kružnice. Točka C je na pripadnom luku, a D je na tetivi $\overline{AB}$. Odredi površinu trokuta ABC ako je $|AD| = 2$ cm, $|BD| = 1$ cm i $|CD| = \sqrt{2}$ cm.

3758. Dan je četverokut $ABCD$. Točke A', B', C', D' su na polupravcima AB, BC, CD, DA tako da je $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DA}$. Ako su poznati vrhovi četverokuta $A'B'C'D'$, samo pomoću ravnala i šestara rekonstruiraj četverokut $ABCD$.

3759. Ako su α, β, γ kutovi trokuta, dokaži jednakost

$$\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a}+\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{b}+\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{c}=\frac{s}{4Rr},$$

gdje su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice trokuta, a s poluopseg trokuta.

3760. Odredi zbroj

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}.$$

3761. Bez korištenja računala izračunaj umnožak

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{3\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}.$$

3762. Neka je a realan broj. Dokaži da vrijedi

$$5(\sin^3 a+\cos^3 a)+3\sin a\cos a = 0.04$$

ako i samo ako je

$$5(\sin a+\cos a)+2\sin a\cos a = 0.04.$$

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 470. Nedavni potres oštetio je strujne instalacije u garaži. Vlasnik je to utvrdio tek navečer kad mu je trebalo nešto iz garaže pa je uzeo dugački produžni kabel s grlom za žarulju i osvijetlio si garažu. Učinilo mu se da žarulja slabije gori pa je izmjerio napon na njenim krajevima i utvrdio da iznosi 210 volta. Snaga žarulje je 100 vata, a napon gradske mreže 230 volta. Koliki je otpor kabela?

OŠ – 471. Automobil vozi brzinom 72 km/h pored pruge koja ide paralelno sa cestom. Pored njega, u istom smjeru, vozi vlak koji ima 14 vagona i lokomotivu. Duljina vagona i lokomotive je približno jednaka i iznosi 14 metara. Vozač je izmjerio da mu je trebalo 46 sekundi da pretekne vlak. Kolika je brzina vlaka? Duljina automobila je 6 metara, a razmaci između vagona iznose 1 metar.

OŠ – 472. Nova baterija od 4.5 volta u džepnoj lampi može raditi 1 sat. Kroz žaruljicu će za to vrijeme teći struja od 250 miliampera. Koliko će elektrona za to vrijeme proći kroz žaruljicu? Naboj jednog elektrona iznosi $1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

OŠ – 473. Pumpa snage 2 kilovata puni bazen vodom iz bunara koji je dubok 10 metara. Bazen je dugačak 6, širok 5 i dubok 1.5 metara. Pumpi treba 2500 sekundi da ga napuni. Kolika je korisnost pumpe? Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

1728. Žarulja sa žarnom niti ima snagu 100 W. Odredi površinu žarne niti, ako pretpostavimo da je ona crno tijelo temperature 2000 K.

1729. Koristeći izraz za moment tromosti homogenog diska mase m i radijusa r, $I = mr^2/2$, izvedi izraz za moment tromosti homogenog kružnog vijenca mase m, unutarnjeg radijusa r_1 i vanjskog r_2. Rotacija se odvija oko osi simetrije, za disk i za vijenac.

1730. Proton kinetičke energije $E_k = 2$ MeV elastično se sudara s jezgrom ^{4}He. Odredi kinetičku energiju protona i jezgre helija poslije sudara, ako se proton giba suprotno od početnog smjera (centralni sudar).

1731. Uzorak napravljen pred 50 godina sadrži 5 grama lutecija. Lutecij ima dva prirodna izotopa, ^{175}Lu koji je stabilan i ^{176}Lu koji se raspada u ^{176}Hf s vremenom poluraspada 38 milijardi godina. Udio ^{176}Lu je 2.6 % ukupnog broja atoma lutecija. Odredi koliko je sada atoma hafnija u uzorku, ako ga u trenutku izrade uzorka uopće nije bilo.

1732. Putanja rakete sa Zemlje na Mars uz najmanji utrošak goriva je polovica elipse oko Sunca s perihelom 1 a.j. (blizu Zemlje) i afelom 1.4 a.j. (blizu Marsa kad je najbliže Suncu) i zove se *Hohmannova orbita*. Odredi vrijeme puta sa Zemlje na Mars (polovina ophodnog vremena po Hohmannovoj orbiti) i brzinu u odnosu na Sunce, na početku i na kraju puta.

1733. Nerastezljiva nit zanemarive mase i kuglica mase $m = 100$ g postavljeni su tako da čine matematičko njihalo. U početnom trenutku njihalo je otklonjeno za kut 60°. Nit puca ako sila napetosti dosegne $T_0 = 25$ N. Zanemariti otpor zraka i međudjelovanja sustava s okolinom. Uzeti $g = 10\ \mathrm{ms^{-2}}$.

a) Kolika je napetost niti kad je otklon njihala 30°?

b) Hoće li nit puknuti?

1734. Konvergentna leća žarišne daljine $f = 4$ cm može se postaviti između nepomičnog predmeta i zastora, međusobno udaljenih $d = 25$ cm. Kad je leća postavljena na udaljenost a od predmeta, daje na zastoru oštru sliku udaljenu b od leće. Kad je leća postavljena na udaljenost b od predmeta, također daje oštru sliku na istom zastoru. Odredi udaljenost L između tih dvaju položaja leće i visinu i prirodu slike na zastoru u oba slučaja ako je početna visina predmeta $h = 5$ cm.

Zadatke **1733** i **1734** postavio je učenik XV. gimnazije Filip Vučić, na čemu mu se uredništvo MFL-a zahvaljuje.

C) Rješenja iz matematike

3721. *Dokaži da je broj*

$$27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$$

djeljiv s 26 460.

Rješenje. Kanonski rastav broja 26 460 na proste faktore je

$$26\,460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Neka je $A = 27\,195$, $B = 10\,887$ i $C = 10\,152$. Broj C^8 je očito djeljiv s 2^2. Broj $A^8 - B^8$ je razlika osmih potencija brojeva A i B i djeljiva je s 2^2 (razlika kvadrata dvaju neparnih brojeva sigurno je djeljiva čak s 8). Ovim smo dobili da je broj $A^8 - B^8 + C^8$ djeljiv s 2^2. Svaki od brojeva A, B, C djeljiv je s 3, pa je osma potencija tih brojeva djeljiva s 3^3. Broj A djeljiv je s 5 i sa 7 (jer je $A : 49 = 555$), pa je A^8 sigurno djeljivo i s 5 i sa 7^2. Konačno, razlika $B^8 - C^8$ ima faktor $B - C = 735$. Kako je $\frac{735}{7^2 \cdot 5} = 3$, slijedi da je $B^8 - C^8$ djeljivo s 5 i sa 7^2. Dakle, broj $A^8 - B^8 + C^8$ je djeljiv s

$$26\,460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Oliver Kukas (4), Gimnazija A. G. Matoša, Zabok

3722. *Riješi jednadžbu*

$$2x^2 - 15x + 5 + \sqrt{2x^2 - 15x + 11} = 0.$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $t = 2x^2 - 15x + 5$. Tada je:

$$t + \sqrt{t+6} = 0 \qquad (1)$$

$$\sqrt{t+6} = -t \ /\ ^2$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

odakle je $t_1 = 3$, $t_2 = -2$. Uvrštavanjem u (1) vidimo da je samo $t = -2$ rješenje te jednadžbe, tj. $2x^2 - 15x + 7 = 0$.

Dakle, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 7$.

Provjerom se vidi da su to zaista rješenja.

Maja Drmač (4), XV. gimnazija, Zagreb

3723. *Nađi sva cjelobrojna rješenja sistema jednadžbi*

$$3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0$$

$$5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0.$$

Rješenje. Eliminirajmo x: oduzmimo trostruku drugu od peterostruke prve jednadžbe. Dobivamo

$$-y^2 + z^2 + 48 = 0 \qquad \text{ili}$$

$$48 = y^2 - z^2 = (y+z)(y-z).$$

Kako je $(y+z)-(y-z) = 2z$ parno, oba broja $y+z$ i $y-z$ su parna. Postoje ove mogućnosti

$$(y+z, y-z) \in \{(24,2),(12,4),(8,6)\}.$$

Rješavanjem po y i z dobivamo

$$(y,z) \in \{(13,11),(8,4),(7,1)\}.$$

Iz polazne jednadžbe dobivamo

$$x \in \{16, \sqrt{26}, 4\}.$$

Prema tome, cjelobrojna rješenja su

$$(16,13,11), \quad (4,7,1).$$

Zara Bičvić (1), III. gimnazija, Osijek

3724. *Postoje li strogo pozitivni cijeli brojevi x i y takvi da je $x^2(x^2+y^2) = y^{100}$?*

Rješenje. Redom imamo

$$x^2(x^2+y^2) = y^{100}$$

$$x^4 + x^2y^2 = y^{100} \ /\ \cdot 4$$

$$4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = 4y^{100} + y^4$$

$$(2x^2+y^2) = y^4(4y^{96}+1).$$

Lijeva strana jednadžbe je potpun kvadrat pa mora biti i desna, tj. mora biti:

$$4y^{96} + 1 = w^2, \quad w \in \mathbb{N}.$$

Lijeva strana ove jednadžbe je neparan broj pa mora biti i desna, tj. $w = 2v+1$, $v \in \mathbb{N}$. Sada je:

$$4y^{96} + 1 = (2v+1)^2$$

$$4y^{96} + 1 = 4v^2 + 4v + 1 \ /\ :4$$

$$y^{96} = v(v+1)$$

$$(y^{48})^2 = v(v+1).$$

Lijeva strana je kvadrat prirodnog broja pa mora biti i desna. No, kako je

$$v^2 < v(v+1) < (v+1)^2, \quad v \in \mathbb{N}$$

desna strana je smještena između dvaju susjednih kvadrata cijelih brojeva pa sigurno nije potpun kvadrat. Ovim smo dokazali da ne postoje prirodni brojevi x i y koji zadovoljavaju danu jednadžbu.

Oliver Kukas (4), Zabok

3725. *Riješi jednadžbu*

$$2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0, \ a > 0, \ a \neq 1.$$

Rješenje. Jednadžbu transformiramo:

$$2 \cdot \frac{\log_a a}{\log_a x} + \frac{\log_a a}{\log_a ax} + 3 \cdot \frac{\log_a a}{\log_a a^2x} = 0$$

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{1+\log_a x} + \frac{3}{2+\log_a x} = 0.$$

Uvedemo li supstituciju $t = \log_a x$ imamo:

$$\frac{2}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{3}{t+2} = 0 \ /\ \cdot t(t+1)(t+2)$$

uvjeti: $t \neq 0$, $t \neq -1$, $t \neq -2$

$$2(t+1)(t+2) + t(t+2) + 3t(t+1) = 0$$

$$6t^2+11t+4=0$$

$$t_1=-\frac{1}{2},\quad t_2=-\frac{4}{3}.$$

1°

$$t_1=-\frac{1}{2}$$
$$\log_a x=-\frac{1}{2}$$
$$x=a^{-\frac{1}{2}}$$
$$x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2°

$$t_2=-\frac{4}{3}$$
$$\log_a x=-\frac{4}{3}$$
$$x=a^{-\frac{4}{3}}$$
$$x_2=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}.$$

Oliver Kukas (4), Zabok

3726. *Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^{2021}}{b^{2019}}+\frac{b^{2021}}{c^{2019}}+\frac{c^{2021}}{a^{2019}}\geq a^2+b^2+c^2.$$

Rješenje. Kako se radi o pozitivnim brojevima možemo koristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine:

$$\frac{\frac{a^{2021}}{b^{2019}}+\frac{a^{2021}}{b^{2019}}+b^2+b^2+\ldots+b^2}{2021}\geqslant \sqrt[2021]{\frac{a^{2021}}{b^{2019}}\cdot\frac{a^{2021}}{b^{2019}}\cdot\underbrace{b^2\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2}_{2019}}$$

$$\Longrightarrow\ 2\cdot\frac{a^{2021}}{b^{2019}}+2019b^2\geqslant 2021a^2. \qquad (1)$$

Analogno dobivamo:

$$2\cdot\frac{b^{2021}}{c^{2019}}+2019c^2\geqslant 2021b^2 \qquad (2)$$

i

$$2\cdot\frac{c^{2021}}{a^{2019}}+2019a^2\geqslant 2021c^2. \qquad (3)$$

Zbrajanjem ovih triju jednakosti slijedi:

$$2\left(\frac{a^{2021}}{b^{2019}}+\frac{b^{2021}}{c^{2019}}+\frac{c^{2021}}{a^{2019}}\right)+2019(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2021(a^2+b^2+c^2)$$

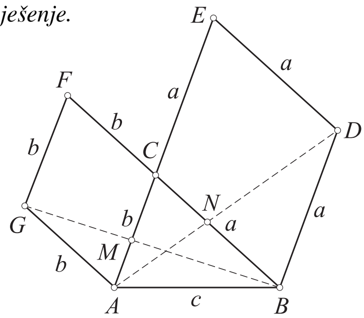
tj.

$$\frac{a^{2021}}{b^{2019}}+\frac{b^{2021}}{c^{2019}}+\frac{c^{2021}}{a^{2019}}\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

Oliver Kukas (4), Zabok

3727. *Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC produže se preko vrha C do točaka E i F tako da je $|CE|=|BC|=a$ i $|CF|=|AC|=b$. Točke D i G su takve da je svaki od četverokuta $CBDE$ i $ACFG$ romb. Sjecište pravaca BG i AC je točka M, a sjecište od AD i BC je točka N. Dokaži da je $|CM|=|CN|$.*

Rješenje.



Iz uvjeta zadatka je očito:

$$\triangle BCM\sim\triangle BFG$$
$$\Longrightarrow |CM|:b=a:(a+b)$$
$$\Longrightarrow |CM|=\frac{ab}{a+b}, \qquad (1)$$
$$\triangle ANC\sim\triangle ADE$$
$$\Longrightarrow |CN|:a=b:(a+b)$$
$$\Longrightarrow |CN|=\frac{ab}{a+b}. \qquad (2)$$

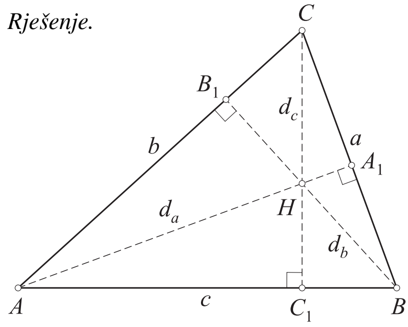
Iz (1) i (2) je $|CM|=|CN|$.

Oliver Kukas (4), Zabok

3728. *Neka su a, b, c duljine stranica, v_a, v_b, v_c duljine visina i d_a, d_b, d_c udaljenosti od vrhova do ortocentra šiljastokutnog trokuta. Dokaži jednakost*

$$v_ad_a+v_bd_b+v_cd_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Rješenje.



Sa slike uočavamo sljedeće:

$$\triangle AHC_1 \sim \triangle ABA_1$$
$$|AH| : |AC_1| = |AB| : |AA_1|$$
$$|AH| \cdot |AA_1| = |AC_1| \cdot |AB|$$
$$v_a d_a = c \cdot |AC_1| \qquad (1)$$
$$\triangle AB_1H \sim \triangle AA_1C$$
$$|AH| : |AB_1| = |AC| : |AA_1|$$
$$|AH| \cdot |AA_1| = |AB_1| \cdot |AC|$$
$$v_a d_a = b \cdot |AB_1| \qquad (2)$$
$$\triangle HBC_1 \sim \triangle ABB_1$$
$$|BH| : |BC_1| = |AB| : |BB_1|$$
$$|BH| \cdot |BB_1| = |AB| \cdot |BC_1|$$
$$v_b d_b = c \cdot |BC_1| \qquad (3)$$
$$\triangle A_1BH \sim \triangle B_1BC$$
$$|BH| : |BA_1| = |BC| : |BB_1|$$
$$|BH| \cdot |BB_1| = |BC| \cdot |BA_1|$$
$$v_b d_b = a \cdot |BA_1| \qquad (4)$$
$$\triangle A_1CH \sim \triangle C_1BC$$
$$|CH| : |CA_1| = |BC| : |CC_1|$$
$$|CH| \cdot |CC_1| = |CA_1| \cdot |BC|$$
$$v_c d_c = a \cdot |CA_1| \qquad (5)$$
$$\triangle B_1CH \sim \triangle C_1CA$$
$$|CH| : |CB_1| = |AC| : |CC_1|$$
$$|CH| \cdot |CC_1| = |AC| \cdot |CB_1|$$
$$v_c d_c = b \cdot |CB_1|. \qquad (6)$$

Zbrajanjem šest dobivenih jednakosti slijedi:

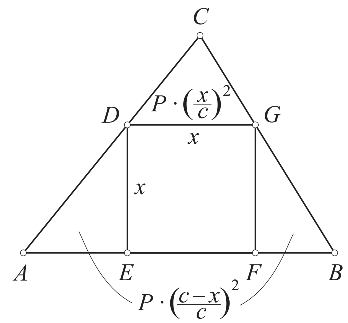
$$\begin{aligned}
&2(v_a d_a + v_b d_b + v_c d_c)\\
&= a(|BA_1| + |A_1C|) + b(|AB_1| + |B_1C|)\\
&\quad + c(|AC_1| + |C_1B|)\\
&v_a d_a + v_b d_b + v_c d_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Oliver Kukas (4), Zabok

3729. *Trokut ABC je šiljatokutan ili pravokutan. U njega je upisan kvadrat $DEFG$ tako da je $E,\ F \in \overline{AB},\ D \in \overline{AC}$ i $G \in \overline{BC}$. Kolika je površina kvadrata, ako su duljine stranica trokuta $a,\ b,\ c$. Izračunaj površinu kvadrata ako je $A(-3, 6),\ B(6, -6),\ C(8, 8)$.*

Prvo rješenje. Neka je x stranica kvadrata, P površina trokuta ABC i neka su stranice a, b, c trokuta nasuprot vrhova A, B, C, tim redom. Površina kvadrata je x^2. Mali trokut iznad kvadrata je sličan trokutu ABC, zbog paralelnih stranica, pa je površina tog trokuta jednaka $P \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^2$. Isto tako, spojimo li preostala dva manja trokuta u jedan (imaju istu visinu i stranice na kojima je ta visina su na istom pravcu), dobivamo trokut sličan trokutu ABC po K-K poučku pa je njegova površina jednaka $P \cdot \left(\frac{c-x}{c}\right)^2$.



Sve zajedno imamo:

$$x^2 + P \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^2 + P \cdot \left(\frac{c-x}{c}\right)^2 = P \ / \ \cdot \frac{c^2}{P}$$
$$\frac{c^2}{P}x^2 + x^2 + (c-x)^2 = c^2$$
$$\left(2 + \frac{c^2}{P}\right)x^2 = 2cx \ / \ \cdot \frac{1}{x}$$
$$\left(2 + \frac{c^2}{P}\right)x = 2c$$
$$x = \frac{2c}{2 + \frac{c^2}{P}} = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{c}{2P}},$$

odnosno površina kvadrata je

$$x^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{c} + \frac{c}{2P}\right)^2}.$$

Površinu trokuta P možemo izračunati na puno načina, ali pošto imamo samo vrhove trokuta, koristimo formulu iz analitičke geometrije.

Konkretno, u zadanom slučaju $A(-3,6)$, $B(6,-6)$, $C(8,8)$, možemo izračunati površinu pomoću analitičke formule za površinu trokuta:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \\ P &= \frac{1}{2}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) \\ &\quad + x_C(y_A - y_B)| \\ &= \frac{1}{2}|(-3)\cdot(-14) + 6\cdot 2 + 8\cdot 12| = 75 \end{aligned}$$

pa je površina kvadrata jednaka

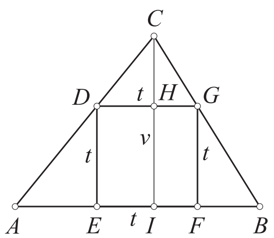
$$x^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{15} + \frac{15}{150}\right)^2} = 6^2 = 36.$$

Maja Drmač (4), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $t = |EF| = |FG| = |DG| = |DE|$. Iz $\triangle AED \sim \triangle AIC$ i $\triangle BFG \sim \triangle BIC$ dobivamo

$$\frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|AI|}{|CI|} \quad \text{tj.} \quad |AE| = \frac{t}{v}|AI|$$

$$\frac{|BF|}{|FG|} = \frac{|BI|}{|CI|} \quad \text{tj.} \quad |BF| = \frac{t}{v}|BI|.$$



Kako je $|AI| + |EF| + |BF| = c$ imamo

$$\frac{t}{v}|AI| + t + \frac{t}{v}|BI| = c \ / \ \cdot v$$

$$t\cdot|AB| + tv = vc$$

$$t = \frac{vc}{v+c}.$$

Iz Heronove formule izračunamo visinu v trokuta iz vrha C:

$$P = \frac{cv}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$$v = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$

Površina kvadrata je

$$P_1 = t^2\left[\frac{2c\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} + c^2}\right]^2$$

$$P_1 = \left(\frac{2\cdot 15\cdot 75}{2\cdot 75 + 15^2}\right)^2 = 36.$$

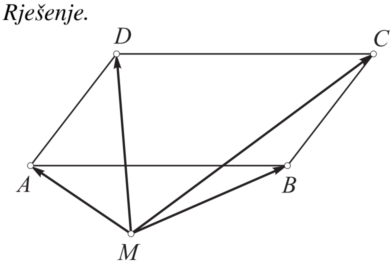
Oliver Kukas (4), Zabok

3730. *Ako u ravnini paralelograma $ABCD$ postoji točka M takva da je*

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$$

dokaži da je paralelogram pravokutnik.

Rješenje.



Iz uvjeta imamo

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2,$$

odakle je

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2 \\ &\overrightarrow{MA}^2 + (\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BC}^2)^2 \\ &\qquad = \overrightarrow{MB}^2 + (\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{AD}^2) \\ &\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD} \\ &\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \\ &(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \\ &(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \\ &\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \implies AB \perp AD. \end{aligned}$$

No, ako je jedan kut paralelograma jednak 90° i ostala tri isto iznose 90°. Dakle, dani paralelogram je pravokutnik.

Oliver Kukas (4), Zabok

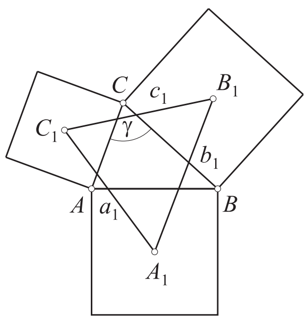
3731. *Na stranicama trokuta ABC s vanjske strane su konstruirani kvadrati sa središtima A_1, B_1, C_1. Neka su a_1, b_1, c_1 duljine stranica trokuta $A_1B_1C_1$ i S površina trokuta*

ABC. *Dokaži*

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S.$$

Rješenje. Sa slike, koristeći kosinusov poučak, imamo:

$$\begin{aligned}
c_1^2 &= |CC_1|^2 + |CB_1|^2 \\
&\quad - 2|CC_1| \cdot |CB_1| \cdot \cos \sphericalangle B_1CC_1 \\
&= \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&\quad - 2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(90^\circ + \gamma) \\
&= \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} + ab\sin\gamma \\
&= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2S. \qquad (1)
\end{aligned}$$



Analogno dobivamo

$$a_1^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + 2S \qquad (2)$$

$$b_1^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} + 2S. \qquad (3)$$

Zbrajanjem jednakosti (1), (2) i (3) slijedi tvrdnja zadatka.

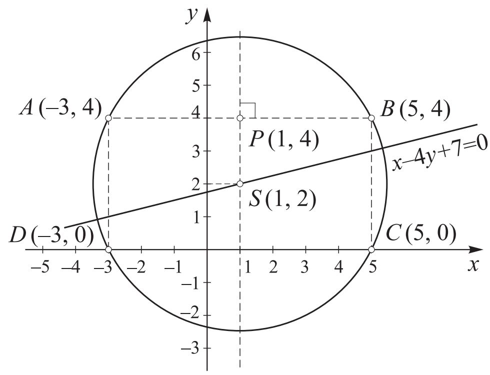
Oliver Kukas (4), Zabok

3732. *Točke $A(-3,4)$, $B(5,4)$, C, D su vrhovi pravokutnika, a na pravcu $x-4y+7=0$ se nalazi promjer pravokutniku ABCD opisane kružnice. Kolika je njegova površina?*

Rješenje. Odmah uočimo da su A i B susjedne točke pravokutnika. U protivnom, da su to krajevi dijagonale pravokutnika tada bi polovište dužine $\overline{AB}$ ležalo na pravcu $x - 4y + 7 = 0$, a to očito nije slučaj.

Središte kružnice dobijemo kao presjek pravca $x - 4y + 7 = 0$ i simetrale dužine $\overline{AB}$ tj. pravca $x = 1$. Dobivamo $S(1,2)$, pa uz uvjet da točke A i B leže na toj kružnici, njena jednadžba je

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20.$$



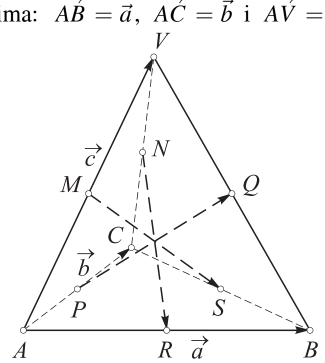
Konačno, kao presjek pravaca $x = 5$ i $x = -3$ redom dobivamo točke $C(5,0)$ i $D(-3,0)$. Sada imamo i traženu površinu:

$$P = 8 \cdot 4 = 32.$$

Oliver Kukas (4), Zabok

3733. *Dokaži da je suma kvadrata duljina bridova trostrane piramide, četiri puta veća od sume kvadrata udaljenosti između polovišta njezinih mimoilaznih bridova.*

Prvo rješenje. Neka je dani tetraedar razapet vektorima: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{AV} = \vec{c}$.



Tada je redom:

$$\overrightarrow{VB} = \vec{a} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{VC} = \vec{b} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MS} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} \\
&= -\frac{\vec{c}}{2} + \vec{a} - \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2},
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AR}$$
$$= \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2} - \vec{b} + \frac{\vec{a}}{2} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2},$$
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$$
$$= -\frac{\vec{b}}{2} + \vec{a} - \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}.$$

Sada je:

$$|VA|^2 + |VB|^2 + |VC|^2 + |AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2$$
$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a}-\vec{c})^2 + (\vec{b}-\vec{c})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2$$
$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2 + \vec{b}^2$$
$$- 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$$
$$= 3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 3\vec{c}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{a}\cdot\vec{b}, \qquad (1)$$
$$|MS|^2 + |NR|^2 + |PQ|^2$$
$$= \left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{\vec{a}^2}{4} + \frac{\vec{b}^2}{4} + \frac{\vec{c}^2}{4} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$+ \frac{\vec{a}^2}{4} + \frac{\vec{b}^2}{4} + \frac{\vec{c}^2}{4} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$+ \frac{\vec{a}^2}{4} + \frac{\vec{b}^2}{4} + \frac{\vec{c}^2}{4} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$= \frac{3}{4}\vec{a}^2 + \frac{3}{4}\vec{b}^2 + \frac{3}{4}\vec{c}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$= \frac{1}{4}(3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 3\vec{c}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{c}). \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi tvrdnja zadatka.

Oliver Kukas (4), Zabok

Drugo rješenje. Ako je $ABCD$ paralelogram, tada je

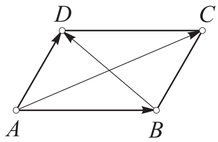
$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|AB|^2 + |AD|^2).$$

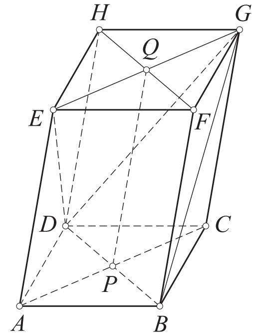
ova tvrdnja se dokazuje vektorski,

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2).$$

Neka je tetraedar $BDEG$ uložen u paralelepiped $ABCDEFGH$ kao na slici.

Neka su P i Q sjecišta dijagonala paralelograma $ABCD$ i $EFGH$. Tada je $PQ \parallel AE$ i $|PQ| = |AE|$. Analogne relacije vrijede i za paralelograme $BCGF$, $ADHE$ i $ABFE$, $DCGH$, tj. $P_1Q_1 \parallel AB$, $|P_1Q_1| = |AB|$ i $P_2Q_2 \parallel AD$ i $|P_2Q_2| = |AD|$.





Sada je

$$(|BE|^2 + |DG|^2) + (|ED|^2 + |BG|^2)$$
$$+ (|BD|^2 + |EG|^2)$$
$$= (|BE|^2 + |AF|^2) + (|ED|^2 + |AH|^2)$$
$$+ (|BD|^2 + |AC|^2)$$
$$= 2(|AB|^2 + |AE|^2) + 2(|AD|^2 + |AE|^2)$$
$$+ 2(|AB|^2 + |AD|^2)$$
$$= 4(|AB|^2 + |AD|^2 + |AE|^2)$$
$$= 4(|PQ|^2 + |P_1Q_1|^2 + |P_2Q_2|^2),$$

što je zbroj kvadrata udaljenosti polovišta nasuprotnih bridova.

Ur.

3734. *Promatraj polinome s kompleksnim koeficijentima* $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *s nultočkama* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *i* $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ *s nultočkama* $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$. *Ako su* $a_1 + a_3 + \ldots$ *i* $a_2 + a_4 + \ldots$ *realni brojevi, dokaži da je* $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ *također realan broj.*

Rješenje. Gledamo

$$P(1) = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{i}$$
$$P(-1) = (-1)^n + (-1)^{n-1}a_1 + (-1)^{n-2}a_2$$
$$+ \ldots + a_n$$

i budući da su $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ i $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ realni brojevi, to su $P(1)$ i $P(-1)$ također realni brojevi. Nadalje je

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$
$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)\ldots(x - x_n^2)$$

pa imamo

$$
\begin{aligned}
&1+b_1+b_2+\ldots+b_n=Q(1)\\
&=(1-x_1^2)(1-x_2^2)\ldots(1-x_n^2)\\
&\Longrightarrow\ b_1+b_2+\ldots+b_n\\
&=\underbrace{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}_{P(1)}\\
&\quad\cdot\underbrace{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)}_{(-1)^nP(-1)}-1\\
&=(-1)^nP(1)P(-1)-1.
\end{aligned}
$$

Prema tome, uz gore navedeno, zbroj

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=Q(1)-1$$

je isto tako realan broj.

Oliver Kukas (4), Zabok

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 462. *U čašu mase 90 grama i unutarnjeg promjera 5 centimetara učenik je ulio sirup do visine 2 centimetra. Dolio je vodu tako da je ukupna visina tekućine bila 12 centimetara. Masa čaše i tekućine iznosila je 333.5 grama. Gustoća vode je* $1000\ kg/m^3$. *Kolika je gustoća sirupa?*

Rješenje.

$m_č = 90$ g

$d = 5$ cm

$h = 2$ cm

$h_1 = 12$ cm

$m = 333.5$ g

$\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m^3} = 1\ \mathrm{g/cm^3}$

$\rho_s = ?$

$$
\begin{aligned}
V_s &= r^2\cdot\pi\cdot h\\
&= (2.5\ \mathrm{cm})^2\cdot\pi\cdot 2\ \mathrm{cm} = 39.27\ \mathrm{cm^3}\\
V_v &= r^2\cdot\pi\cdot\Delta h\\
&= (2.5\ \mathrm{cm})^2\cdot\pi\cdot 10\ \mathrm{cm} = 196.35\ \mathrm{cm^3}\\
m_v &= V\cdot\rho\\
&= 196.35\ \mathrm{cm^3}\cdot 1\ \mathrm{g/cm^3} = 196.35\ \mathrm{g}\\
m_s &= m - m_č - m_v\\
&= 333.5\ \mathrm{g} - 90\ \mathrm{g} - 196.35\ \mathrm{g} = 47.15\ \mathrm{g}
\end{aligned}
$$

$$\rho_s = \frac{m}{V} = \frac{47.15\ \mathrm{g}}{39.27\ \mathrm{cm^3}} = 1.2\ \mathrm{g/cm^3}.$$

Antonija Glasnović (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 463. *Ako se trese boca u kojoj je gazirana tekućina tlak u njoj može biti pet puta veći od atmosferskog tlaka. Kolika sila djeluje tada na čep promjera 2 centimetra? Atmosferski tlak je oko 1000 hPa.*

Rješenje.

$p = 5\ \mathrm{p_{atm}}$

$d = 2$ cm

$\mathrm{p_{atm}} = 1000$ hPa

$F = ?$

$$
\begin{aligned}
p &= 5\ \mathrm{p_{atm}} = 5\cdot 1000\ \mathrm{hPa}\\
&= 5000\ \mathrm{hPa} = 500\,000\ \mathrm{Pa} = 5\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\\
A &= r^2\pi = 1\ \mathrm{cm^2}\cdot\pi\\
&= 3.14\ \mathrm{cm^2} = 3.14\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}\\
F &= p\cdot A = 5\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\cdot 3.14\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}\\
&= 157\ \mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

Antonija Glasnović (8), Zagreb

OŠ – 464. *Učitelj fizike voli nedjeljom dugo hodati. U prvih je 2 sata prešao 10 kilometara, zatim je idućih 45 minuta hodao brzinom 4 kilometra na sat, a u posljednjih je pola sata prešao samo 1.5 kilometara. Usporedite njegove brzine na prvoj i drugoj polovici puta.*

Rješenje.

$t_1 = 2$ h, $\quad s_1 = 10$ km

$t_2 = 45$ min, $\quad v_2 = 4$ km/h

$t_3 = 0.5$ h, $\quad s_3 = 1.5$ km

$\dfrac{v'}{v''} = ?$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{s_1}{t_1} = \frac{10\ \mathrm{km}}{2\ \mathrm{h}} = 5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\\
s_2 &= v_2\cdot t_2 = 4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot 0.75\ \mathrm{h} = 3\ \mathrm{km}\\
v_3 &= \frac{s_3}{t_3} = \frac{1.5\ \mathrm{km}}{0.5\ \mathrm{h}} = 3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}
\end{aligned}
$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 14.5 \text{ km}$$

$$\frac{s}{2} = 7.25 \text{ km}.$$

Na prvoj polovici puta učiteljeva je brzina bila:

$$v' = v_1 = 5 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Tu polovicu ukupnog puta učitelj je prešao za vrijeme

$$t' = \frac{7.25 \text{ km}}{5 \text{ km/h}} = 1.45 \text{ h}.$$

Drugu polovicu puta je prešao za vrijeme:

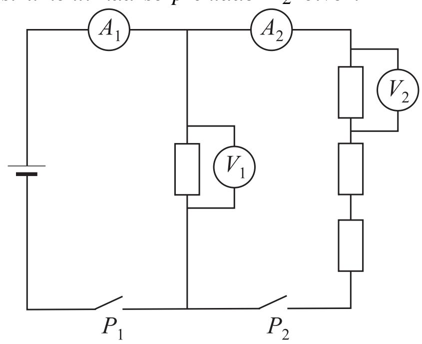
$$t'' = 0.55 \text{ h} + 0.75 \text{ h} + 0.5 \text{ h} = 1.8 \text{ h}$$

$$v'' = \frac{7.25 \text{ km}}{1.8 \text{ h}} = 4.03 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\frac{v'}{v''} = \frac{5 \text{ km/h}}{4.03 \text{ km/h}} = 1.24.$$

Porin Kotnik (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 465. *Svi otpornici na shemi su jednaki i otpor im je 30 Ω. Kad su zatvorena oba prekidača ampermetar A_1 mjeri struju od 800 miliampera. Koliko pokazuju ostali instrumenti? Koliko će pokazivati svi instrumenti kad se prekidač P_2 otvori?*



Rješenje.

P_1 i P_2 zatvoreni

$R_1 = R_2 = R_3 = 30\ \Omega$

$\underline{I_1 = 800 \text{ mA}}$

$I_2,\ U_1,\ U_2 = ?$

P_2 otvoren $I_1, I_2, U_1, U_2 = ?$

U desnoj je grani otpor tri puta veći pa će struja biti tri puta manja. Struja koju mjeri ampermetar A_1 će se podijeliti na 600 mA i 200 mA, dakle $I_2 = 200$ mA.

Lijeva grana ima napon

$$U_1 = I_1 \cdot R = 0.6A \cdot 30\ \Omega = 18 \text{ V} = U_{\text{izvor}}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{3} = 6 \text{ V}.$$

Kad se prekidač P_2 otvori kroz desnu granu više neće teći struja.

$$I_2 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_1 = 18 \text{ V}, \quad I_1 = 600 \text{ mA}.$$

Porin Kotnik (8), Zagreb

1714. *Tri jednaka tanka homogena štapa mase m i duljine l spojena su u jednakostranični trokut (kao glazbeni triangl). Trokut je obješen u jednom vrhu, tako da se može njihati u ravnini svojih štapova. Odredi period malih oscilacija dobivenog njihala.*

Rješenje. Period malih oscilacija fizičkog njihala određen je izrazom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}},$$

gdje je M ukupna masa njihala, I moment tromosti oko objesišta i d udaljenost objesišta od osi kroz težište. Lako se uvjerimo da je ukupna masa $M = 3m$. Udaljenost d iznosi dvije trećine težišnice jednakostraničnog trokuta, dakle

$$d = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}.$$

Moment tromosti I je aditivna veličina, pa možemo zbrojiti doprinose za tri štapa. Za dva koji se dodiruju u objesištu vrijedi izraz za štap koji rotira oko jednog vrha,

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Za treći štap koristimo poučak o paralelnim osima koji daje

$$I_3 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{5}{6}ml^2.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{2}ml^2.$$

Uvrstimo li M, d i I u početnu jednadžbu, period iznosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}ml^2}{3mg\frac{l}{3}\sqrt{3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sqrt{3}}{2g}}.$$

Ur.

1715. *Dva vlaka gibaju se jedan prema drugome. Prvi ima* $n-1$ *vagon i lokomotivu, a drugi* n^2-1 *vagon i lokomotivu. U nekom trenutku prednji krajevi lokomotive obaju vlakova su poravnati, a 10 s kasnije prednji kraj lokomotive jednog vlaka i zadnji kraj zadnjeg vagona drugog, poravnati su. Zadnji krajevi zadnjeg vagona oba vlaka poravnali su se za 80 s. Ako su svi vagoni i lokomotive jednake duljine, a brzina prvog vlaka je dvostruko veća od brzine drugog, odredi* n.

Rješenje. Označimo s v_1 i v_2 brzine prvog i drugog vlaka te s l duljinu vagona ili lokomotive. Za $n \geq 2$ je drugi vlak dulji od prvog. S $t_1 = 10$ s označimo trenutak kada prednji kraj drugog vlaka prođe pored zadnjeg kraja drugog. S $t_2 = 80$ s označimo kada se zadnji krajevi poravnaju. Imamo

$$v_1 + v_2 = \frac{nl}{t_1},$$
$$v_1 + v_2 = \frac{nl + n^2 l}{t_2}.$$

Eliminiranjem brzina iz dviju jednadžbi dobit ćemo

$$\frac{nl}{t_1} = \frac{nl + n^2 l}{t_2}.$$

Sređivanjem slijedi

$$1 + n = \frac{t_2}{t_1},$$
$$n = \frac{t_2}{t_1} - 1.$$

Uvrštavanjem t_1 i t_2 dobijemo $n = 7$.

Ur.

1716. *U balon oblika kugle, mase 2 g pušteno je 2 litre zraka gustoće* $1.3\ kg/m^3$. *Na balon djeluje stalna vanjska sila koja mu je u trenutku početka gibanja dala akceleraciju* $1\ m/s^2$. *Ako je viskoznost zraka* $0.0195\ Pa \cdot s$ *i ako na kuglu polumjera* r *koja se giba brzinom* v *u fluidu viskoznosti* η *prema Stokesovom zakonu djeluje sila kojom se fluid opire gibanju po iznosu jednaka* $6\pi\eta rv$, *odredi kolika će biti brzina balona pri jednolikom gibanju.*

Rješenje. S obzirom da je $\mathrm{kg/m^3}$ jednako g/l, masa zraka iznosi 2.6 g, pa je ukupna masa

$$m = m_b + m_z = 2 + 2.6 = 4.6 \text{ g}.$$

Radijus r balona izračunamo iz volumena,

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi},$$
$$r = 0.07816 \text{ m}.$$

Kako se balon giba jednoliko, možemo izjednačiti stalnu vanjsku silu koja ga vuče naprijed i silu fluida koja ga nastoji zaustaviti:

$$ma = 6\pi\eta rv.$$

Uvrštavanjem vrijednosti, uz preračunavanje mase u kg imamo

$$0.0046 \cdot 1 = 6 \cdot 3.1416 \cdot 0.0195 \cdot 0.07816 \cdot v.$$

Odatle izračunamo brzinu, $v = 0.16$ m/s.

Ur.

1717. *Otpornik otpora* $5\ \Omega$ *uronjen je u 50 ml vode u posudi. Dvije baterije nepoznatog napona i taj otpornik spojimo serijski u strujni krug. Pomoću zapornog sata i termometra izmjerimo brzinu porasta temperature. Nakon toga jednoj bateriji zamijenimo polove i ponovimo mjerenje. Odredi napon svake baterije ako smo mjerenjem dobili porast temperature* $0.01\ K/s$ *u prvom mjerenju i* $0.005\ K/s$ *u drugom.*

Rješenje. Promjena temperature vode uzrokovana je radom električne struje na otporniku pa možemo pisati, uz zanemarive gubitke topline,

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = mc\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{U^2}{R}.$$

$c = 4200\mathrm{J/kgK}$ je specifični toplinski kapacitet vode. Označimo li s k_1 i k_2 brzinu porasta temperature u prvom i drugom mjerenju, a s U_1 i U_2 napone dviju baterija imamo

$$mck_1R = (U_1 + U_2)^2,$$
$$mck_2R = (U_1 - U_2)^2.$$

Uvrstit ćemo

$$k_1 = 0.01 \text{ K/s}, \quad k_2 = 0.005 \text{ K/s},$$
$$mcR = 0.05 \cdot 4200 \cdot 5 = 1050 \text{ J}\Omega/\text{K}.$$

Odatle dobijemo

$$(U_1 + U_2)^2 = 10.5,$$
$$(U_1 - U_2)^2 = 5.25,$$

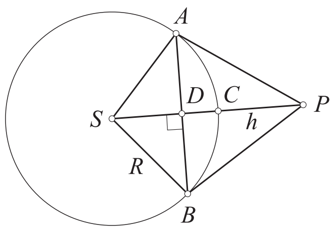
što daje tražene napone

$$U_1 = 2.766 \text{ V}, \quad U_2 = 0.475 \text{ V}.$$

Ur.

1718. *Odredi površinu Zemlje koja se može odjednom vidjeti iz točke s 415 km visine (orbita Međunarodne svemirske postaje ISS). Radijus Zemlje je 6371 km. Koliki se postotak Zemljine površine tada vidi?*

Rješenje. Površina Zemlje koja se može odjednom vidjeti iz točke P jednaka je površini kugline kapice koju odsijecaju tangente iz točke P.



Trokuti SBD i SPB su slični pa slijedi:

$$\frac{|DS|}{|BS|} = \frac{|BS|}{|SP|} \implies |DS| = \frac{R^2}{R+h},$$

$$|CD| = |CS| - |DS| = R - \frac{R^2}{R+h} = \frac{Rh}{R+h}.$$

Površina kugline kapice jednaka je:

$$P = 2R\pi|CD| = 2R\pi\frac{Rh}{R+h} = 1.56 \cdot 10^7 \text{ km}^2.$$

Postotak Zemljine površine koji se vidi iz svemirske postaje je

$$p = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{1.56 \cdot 10^7}{5.1 \cdot 10^8} = 0.0306 = 3.06 \ \%.$$

Borna Cesarec (2),
Srednja škola Krapina, Krapina

1719. *Oko patuljastog planeta gustoće 2700 kg/m^3 kruži satelit 150 km iznad površine. Ako je ophodno vrijeme satelita 2 sata i 30 minuta, odredi ubrzanje slobodnog pada na površini patuljastog planeta.*

Rješenje. Radijus kruženja satelita izrazimo iz trećeg Keplerovog zakona:

$$r^3 = T^2\frac{GM}{4\pi^2}.$$

Masu patuljastog planeta M izrazimo preko radijusa planeta R i gustoće ρ,

$$M = \rho V = \rho\frac{4}{3}R^3\pi,$$

i uvrstimo u gornji izraz

$$r^3 = T^2\frac{G\rho\frac{4}{3}R^3\pi}{4\pi^2}.$$

Kraćenjem i sređivanjem dobijemo

$$\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{G\rho T^2}{3\pi} = 1.5486877.$$

Kubnim korjenovanjem dobijemo

$$\frac{r}{R} = 1.15697,$$

što uz $r - R = 150$ km daje

$$r = 1105.61 \text{ km},$$

$$R = 955.61 \text{ km} = 955\,610 \text{ m}.$$

Iz gustoće izračunamo masu,

$$M = \rho V = \rho\frac{4}{3}R^3\pi = 9.87 \cdot 10^{21} \text{ kg}.$$

Računamo ubrzanje g slobodnog pada na površini

$$g = \frac{GM}{R^2} = 0.721 \text{ m/s}^2.$$

Ur.

1720. *Prilikom fisije nuklearnog goriva nastaju male količine tricija, vodikovog izotopa ^3H, vremena poluraspada 12.312 godina. Ako je aktivnost uzorka tricija $3 \cdot 10^{11}$ Bq, koliku masu tricija sadrži uzorak?*

Rješenje. Aktivnost A, broj atoma N i vrijeme poluraspada T vezani su relacijom

$$A = \frac{N}{T}\ln 2,$$

S obzirom da 1 Bq iznosi 1 raspad u sekundi, morat ćemo T preračunati u sekunde:

$$T = 12.312 \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 3600 = 388\,537\,171 \text{ s}.$$

N izračunamo kao

$$N = \frac{AT}{\ln 2} = 1.6816 \cdot 10^{20}.$$

Množinu tricija izračunamo dijeljenjem s Avogadrovim brojem,

$$n = \frac{1.6816 \cdot 10^{20}}{6.022 \cdot 10^{23}} = 0.0002792 \text{ mol}.$$

Masa u gramima dobije se množenjem s relativnom atomskom masom koja za tricij iznosi 3 g/mol,

$$m = 0.0002792 \cdot 3 \text{ g} = 0.000838 \text{ g} = 838 \ \mu\text{g}.$$

Ur.