Još o zadatku 3563

U Matematičko-fizičkom listu br. $4/268$, str. 266, dano je jedno rješenje sljedećeg zadatka:

Kutovi trokuta su u omjeru $\alpha : \beta : \gamma = 1 : (k+1) : (k+3)$, $k \in \mathbb{R}^+$. *Dokaži da za njegove stranice vrijedi* $a^2 + bc = c^2$.

Ovdje dajemo još osam rješenja ovog zadatka.

Rješenje 1. Koristit ćemo trigonometrijski identitet

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y), \quad x,\ y \in \mathbb{R}$$

koji se dobiva iz adicijskih formula za sinus

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$$

Kako je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin(k+1)\alpha$, $c = 2R\sin(k+3)\alpha$ (R je radijus kružnice opisane oko trokuta ABC), imamo

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 &= (2R\sin(k+3)\alpha)^2 - (2R\sin\alpha)^2 = (2R)^2\sin(k+2)\alpha \cdot \sin(k+4)\alpha \\ &= 2R\sin(k+2)\alpha \cdot 2R\sin(k+4)\alpha. \end{aligned}$$

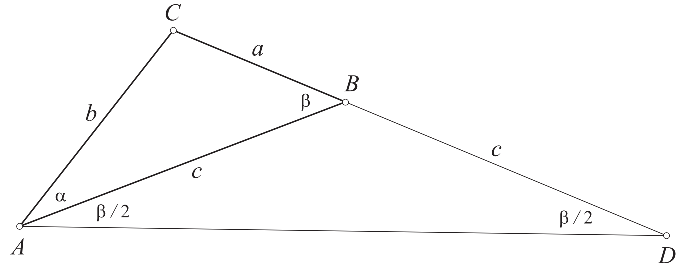
S obzirom da je $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (k+1)\alpha + (k+3)\alpha = (2k+5)\alpha = 180^\circ$, dobivamo

$$\sin(k+2)\alpha = \sin(2k+5-(k+3))\alpha = \sin(k+3)\alpha$$
$$\sin(k+4)\alpha = \sin(2k+5-(k+1))\alpha = \sin(k+1)\alpha$$

pa je

$$c^2 - a^2 = 2R\sin(k+3)\alpha \cdot 2R\sin(k+1)\alpha = c \cdot b.$$

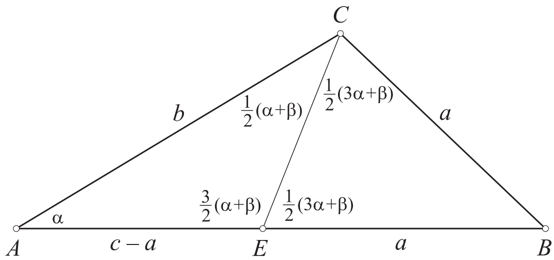
Rješenje 2. Produljimo stranicu $\overline{CB}$ do točke D tako da $|BD| = |AB| = c$ (slika 1). Tada je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \frac{\beta}{2}$.



Slika 1.

Na stranici $\overline{AB}$ odredimo točku E tako da $|BE| = |BC| = a$ (slika 2), pa je $|AE| = c - a$. S obzirom da je zbroj kutova u trokutu $(2k+5)\alpha$ tj. $3\alpha + 2\beta$ i

$\sphericalangle CBE = \beta$, u jednakokračnom trokutu BCE imamo: $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BEC = \frac{1}{2}(3\alpha + \beta)$. Zbog toga je $\sphericalangle AEC = \frac{3}{2}(\alpha + \beta)$ i $\sphericalangle ACE = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.



Slika 2.

Na osnovu poučka o sinusima primijenjenog na trokute ADC i AEC (slike 1 i 2), imamo

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

pa je

$$\frac{c+a}{b} \cdot \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}}. \tag{1}$$

Kako je $\sin(90^\circ \pm x) = \cos x$ i $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$, dobivamo

$$\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\alpha + 2\beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

i

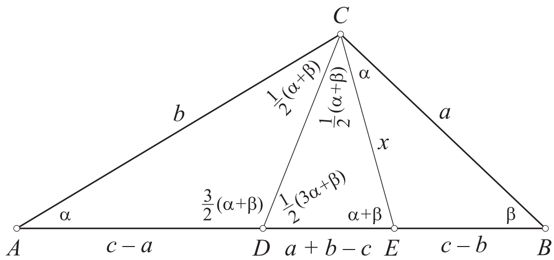
$$\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\alpha + 2\beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha + \beta}{2},$$

tada iz (1), radi $2\sin x \cos x = \sin 2x$, slijedi

$$\frac{c^2 - a^2}{b^2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(180^\circ - \gamma)}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b}$$

a odavde $a^2 + bc = c^2$.

Rješenje 3. Na stranici $\overline{AB}$ odredimo točke D i E tako da je $|AD| = c - a$ i $|BE| = c - b$ (slika 3). Sada je $|DE| = a + b - c$. S obzirom da je $|AE| = |AC|$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCE = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ primjenom teorema o simetrali unutarnjeg kuta $\sphericalangle ACE$ trokuta AEC je $|AD| : |DE| = |AC| : |CE|$ ili $(c - a) : (a + b - c) = b : x$ gdje je $|CE| = x$. Odavde je $x = \frac{b(a+b-c)}{c-a}$.



Slika 3.

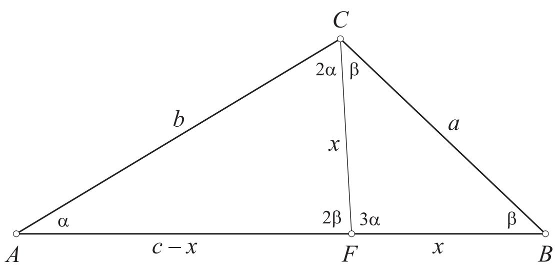
Nadalje je $\sphericalangle BCE = \alpha$.

Koristeći poučak o sinusima, dobivamo iz trokuta ABC i BCE:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \quad \text{i} \quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{x}{c-b} \quad \text{pa je} \quad \frac{b}{a} = \frac{b(a+b-c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Odavde slijedi $c^2 - a^2 = bc$.

Rješenje 4. Na stranici $\overline{AB}$ odaberemo točku F tako da $\sphericalangle BCF = \sphericalangle ABC = \beta$ (slika 4). Zato je $|BF| = |CF|$ tj. trokut BCF je jednakokračan. Ako je $|BF| = x$, onda je $|AF| = c - x$.



Slika 4.

Primjenom poučka o sinusima i kosinusovog poučka na trokut AFC imamo:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{c-x}{\sin 2\alpha} \quad \text{i} \quad x^2 = b^2 + (c-x)^2 - 2b(c-x)\cos\alpha.$$

Iz prve jednakosti, zbog $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ slijedi $\cos\alpha = \dfrac{c-x}{2x}$. Uvrštavanjem posljednje jednakosti u gornju dobivamo $x^2 = b^2 + (c-x)^2 - 2b(c-x)\cdot\dfrac{c-x}{2x}$ odakle je:

$$(c-x)^2\left(1 - \frac{b}{x}\right) + b^2 - x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow\ (c-x)^2\frac{x-b}{x} + (b-x)(b+x) = 0\ /\ :(x-b) \neq 0$$

$$\frac{(c-x)^2}{x} - (b+x) = 0$$

tj.

$$x = \frac{c^2}{b+2c}. \tag{2}$$

Koristeći Stewartov teorem, iz trokuta ABC, dobivamo:

$$|AB| \cdot (|AF| \cdot |FB| + |CF|)^2 = |AC|^2 \cdot |BF| + |BC|^2 \cdot |AF|,$$
$$c\left((c-x)x + x^2\right) = b^2 \cdot x + a^2 \cdot (c-x)$$

odakle je

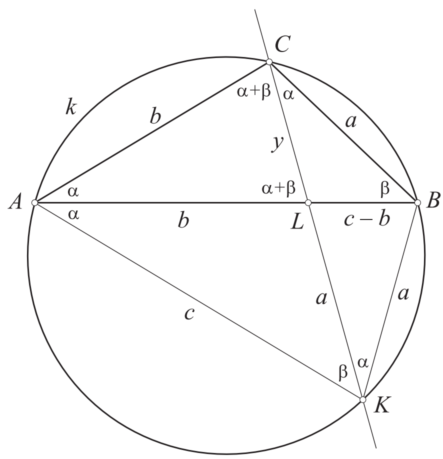
$$x = \frac{a^2 c}{c^2 - b^2 + a^2}. \tag{3}$$

Iz jednakosti (2) i (3) slijedi

$$\frac{c}{b+2c} = \frac{a^2}{c^2 - b^2 + a^2},$$

što je ekvivalentno s $a^2 + bc = c^2$.

Rješenje 5. Kružnica k je opisana oko trokuta ABC i $\sphericalangle BAK = \sphericalangle BAC = \alpha$ (slika 5). Tada je $\sphericalangle CKB = \sphericalangle CAB = \alpha$ (obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{BC}$) i $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ABC = \beta$ (obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{AC}$).



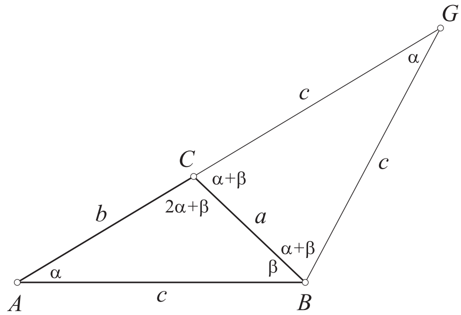
Slika 5.

Zbog toga u trokutu AKC imamo: $\sphericalangle ACK = 180^\circ - (\sphericalangle CAK + \sphericalangle AKC) = 3\alpha + 2\beta - (2\alpha + \beta) = \alpha + \beta$, a u trokutu ALC (L je točka presjeka dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CK}$): $\sphericalangle ALC = 180^\circ - (\sphericalangle CAL + \sphericalangle ACL) = 3\alpha + 2\beta - (\alpha + \alpha + \beta) = \alpha + \beta$. To znači da je trokut ALC jednakokračan, tj. $|AL| = |AC| = b$. Kako je $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BAC = \alpha$, trokut BCK je jednakokračan, tj. $|BK| = |BC| = a$. Dalje, imamo $\sphericalangle BLK = \sphericalangle ALC = \alpha + \beta$ (kao vršni) i $\sphericalangle KBL = 180^\circ - (\sphericalangle BKL + \sphericalangle BLK) = 3\alpha + 2\beta - (\alpha + \alpha + \beta) = \alpha + \beta$, što znači da je i trokut BLK jednakokračan. Znači, $|KL| = |BK| = a$.

Neka je $|CL| = y$. Iz teorema o simetrali unutrašnjeg kuta, za trokut AKC dobijemo $|CL| : |LK| = |AC| : |AK|$ ili $y : a = b : c$, odakle je $y = \dfrac{ab}{c}$. Trokuti ALC i KLB su slični, jer imaju jednake kutove. Zato je $|CL| : |AC| = |BL| : |KL|$ ili $y : b = (c-b) : a$.

Odavde je $y = \dfrac{b}{a}(c-b)$. Najzad, iz jednakosti $y = \dfrac{ab}{c}$ i $y = \dfrac{b}{a}(c-b)$ slijedi $\dfrac{ab}{c} = \dfrac{b}{a}(c-b)$, tj. $a^2 + bc = c^2$.

Rješenje 6. Presjek produžetka dužine $\overline{AC}$ i kružnice $k(B, |AB|)$ obilježimo s G. Tada je trokut ABG jednakokračan, pa je $\sphericalangle BGC = \sphericalangle BAC = \alpha$ (slika 6). Kako je $\sphericalangle BCG = 180° - \sphericalangle ACB = 3\alpha + 2\beta - (2\alpha + \beta) = \alpha + \beta$, u trokutu BGC imamo: $\sphericalangle CBG = (3\alpha + 2\beta) - (\alpha + \alpha + \beta) = \alpha + \beta$, tj. $\sphericalangle BCG = \sphericalangle CBG$. To znači da je i trokut BGC jednakokračan, tj. $|CG| = |BG| = c$.



Slika 6.

Iz kosinusovog poučka primijenjenog na trokute ABC i ABG možemo pisati

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{i} \quad c^2 = c^2 + (b+c)^2 - 2c(b+c)\cos\alpha$$

Iz druge jednakosti slijedi $\cos\alpha = \dfrac{b+c}{2c}$, a uvrštavanjem u prvu dobivamo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \dfrac{b+c}{2c}$, odakle je $a^2 + bc = c^2$.

Rješenje 7. Primjenom Stewartovog teorema na trokut ABG (slika 6), imamo $(b+c)(bc+a^2) = c^2 \cdot b + c^2 \cdot c$. Poslije dijeljenja lijeve i desne strane posljednje jednakosti s $b+c$ dobivamo $bc + a^2 = c^2$.

Rješenje 8. Trokuti ABC i BCE sa slike 3 su slični (imaju jednake kutove), pa je

$$|AB| : |BC| = |BC| : |BE| \quad \text{ili} \quad c : a = a : (c-b).$$

Odavde lako dobivamo traženu jednakost.

Napomena. Ovaj zadatak se može riješiti i primjenom Pitagorinog poučka.

Dragoljub Milošević