Sudoku – napredne metode rješavanja (10)

Žarko Čulić[1]

U ovom nastavku ćemo obraditi jedan zanimljiv teorem o sudokuima. **Greg Tuleja** (čita se Tuleha), poznat pod nazivom Mr. T, je 2008. godine proučavajući rješenja sudokua došao do zanimljivog zaključka kojeg je pretočio u teorem, a koji za razliku od svih drugih strategija ne donosi izravno informacije za popunjavanje polja ili eliminaciju kandidata, već to omogućuje nakon manjeg broja logičkih zaključaka. Teorem je po njemu dobio naziv *Tulejin teorem* ili *Mr. T's Theorem*.

Pogledajmo o čemu se radi u **Tulejinom teoremu**: razmatramo li bilo koji redak (stupac) kvadrata unutar bloka (3 međusobno povezana kvadrata u mreži) u rješenju nekog sudokua, moguća su samo dva slučaja:

1. Ako se ista trojka brojeva nalazi unutar jednog retka (stupca) svakog od 3 kvadrata u bloku (zapravo, dovoljno je u barem 2 kvadrata), tada se i ostale trojke brojeva također nalaze unutar jednog retka (stupca) svakog od 3 kvadrata promatranog bloka (ovo vrijedi zasebno za svaki i horizontalni i vertikalni blok u mreži)
2. Ukoliko ne vrijedi 1., tada postoje 3 para istih brojeva koji se nalaze unutar jednog retka (stupca) unutar svakog od 3 kvadrata u bloku, tj. u svakom retku (stupcu) kvadrata možemo naći par brojeva koji ćemo naći kao isti par brojeva u preostala dva retka (stupca) u druga dva kvadrata u bloku

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2	1	6	5	7	9	3	8	4
B	3	7	9	1	8	4	6	2	5
C	5	8	4	2	6	3	9	1	7
D	9	2	7	4	5	6	1	3	8
E	4	6	5	3	1	8	7	9	2
F	1	3	8	9	2	7	4	5	6
G	6	5	2	7	9	1	8	4	3
H	8	9	3	6	4	2	5	7	1
I	7	4	1	8	3	5	2	6	9

Slika 1.

Na slici 1 imamo jedno rješenje sudokua. Vidimo da u drugom horizontalnom i drugom vertikalnom bloku imamo trojke brojeva (slučaj 1), dok u svim ostalim horizontalnim i vertikalnim blokovima imamo 3 para istih brojeva (slučaj 2).

Dokaz. Budući da izbor brojeva nije bitan, koristit ćemo skupove $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ i $\{7, 8, 9\}$ u prvom kvadratu prvog horizontalnog bloka, a za sve ostale horizontalne i vertikalne blokove dokaz je potpuno analogan. Također, redoslijed brojeva unutar trojke ne utječe na ishod.

[1] Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: `zculic@math.hr`

1. slučaj Ako se ista trojka brojeva nalazi u 2 retka u promatranom bloku, odnosno u 2 kvadrata u bloku, tada se ista trojka mora pojaviti i u trećem retku promatranog bloka. Ta činjenica uvjetuje da se iste trojke brojeva moraju pojaviti i u preostala 2 retka sva tri kvadrata unutar tog bloka. Pogledajte sliku 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	3						
B	4	5	6	1	2	3			
C	7	8	9						

Slika 2.

Uzeli smo redom brojeve 1 do 9 i stavili u prvi kadrat radi jednostavnijeg prikaza – potpuno bi bilo identično da smo i nasumce izabrali brojeve. Potom smo istu trojku iz prvog retka prepisali u drugi redak (mogli smo i u treći redak) drugog kvadrata (mogli smo i trećeg) prvog bloka. Teorem tvrdi da u tom slučaju ista trojka mora biti u prestalom retku preostalog kvadrata, kao i da ostale retke popunjavaju brojevi iz istih trojki brojeva. I stvarno, u primjeru trojka brojeva $\{1, 2, 3\}$ može ići samo u treći redak trećeg kvadrata, a tada brojevi iz trojke $\{4, 5, 6\}$ mogu ići samo u prvi redak trećeg kvadrata i treći redak drugog kvadrata, dok brojevi iz trojke $\{7, 8, 9\}$ mogu ići samo u prvi redak drugog kvadrata i drugi redak trećeg kvadrata (slika 3). Analogno vrijedi i za sve ostale blokove. Dakle, čim u bloku imamo u dva retka (ili stupca) u dva kvadrata brojeve iz iste trojke brojeva, sve ostale retke (stupce) čine također brojevi iz istih trojki.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	3	7	9	8	6	4	5
B	4	5	6	1	2	3	9	8	7
C	7	8	9	5	4	6	2	3	1

Slika 3.

2. slučaj Pretpostavimo da se trojka $\{1, 2, 3\}$ nalazi u prvom retku prvog kvadrata u bloku. Da ne bi imali prvi slučaj s trojkama brojeva, prepišimo u drugi redak drugog kvadrata samo brojeve 1 i 2, a broj 3 prepišimo bilo gdje u treći redak drugog kvadrata. U tom slučaju brojevi 1 i 2 mogu ići samo u treći redak, a broj 3 samo u drugi redak trećeg kvadrata (slika 4).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	3						
B				1	2		3		
C				3			1	2	

Slika 4.

U drugi i treći redak drugog i trećeg kvadrata sada mogu ići bilo koji od preostalih brojeva, recimo brojevi 4 i 5 (slika 5).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	3						
B				1	2	4	3		
C				3			1	2	5

Slika 5.

Vidimo da sada broj 4 mora ići i u treći redak prvog kvadrata te prvi redak trećeg kvadrata, a broj 5 može ići samo u drugi redak prvog kvadrata i prvi redak drugog kvadrata (slika 6).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	3	5			4		
B	5			1	2	4	3		
C	4			3			1	2	5

Slika 6.

Sada su nam u svakom kvadratu ostala prazna po dva polja i jasno je da će se par koji popunjava drugi redak prvog kvadrata naći zajedno u trećem retku drugog kvadrata i prvom retku trećeg kvadrata, a par koji će popuniti treći redak prvog kvadrata naći u prvom retku drugog kvadrata i drugom retku trećeg kvadrata (slika 7).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	3	5	y	z	4	w	x
B	5	w	x	1	2	4	3	y	z
C	4	y	z	3	w	x	1	2	5

Slika 7.

Na taj način smo popunili sve ćelije i imamo tri para istih brojeva koje popunjavaju blok. Time smo dokazali teorem. Brojeve koji nisu u ponavljajućim parovima (u primjeru su to brojevi 3, 4 i 5) zovemo pomičnim (*floating*) brojevima i vidimo da se oni nalaze u svakom kvadratu uz drugi ponavljajući par brojeva. To je još jedna korisna činjenica koja se može koristiti pri rješavanju.

Pogledajmo nekoliko primjera gdje nam *Tulejin teorem* (kraće *TT*) može pomoći ili ubrzati rješavanje sudokua. Na slici 8 je prvi primjer. Probajmo prvo osnovnim metodama pronaći broj koji ide u polje I5:

a) metodom pretraživanja redaka, stupaca i kvadrata: u stupcu 5 nedostaju brojevi 4, 5, 8 i 9. Broj 4 ne može u AB5 budući da se broj 4 nalazi u polju B6, a ne može niti u H5, pa mu preostaje samo polje I5

b) metodom pozicioniranja (skeniranja): pretražujemo drugi vertikalni blok, broj 4 se nalazi u B6 pa ne može biti u H6, a zbog popunjenog središnjeg stupca u kvadratu V, može ići samo u prvi stupac tog kvadrata zbog čega ne može biti u I5, stoga može ići samo u H5 ili u I5, a budući da se broj 4 već nalazi u retku H, konkretno u polju H7, broj 4 može ići samo u I5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8			3		6			
B	1					4	7	3	
C		3	9	7	2	1	8	5	
D		8			7		9		
E	7				6		5	8	3
F			5		3			6	7
G	5	4	8	6	1	7	3	9	2
H	3	6	1	2			4	7	5
I						3	6	1	8

Slika 8.

Pogledajmo kako bi taj problem riješili primjenom Tulejinog teorema. U drugom vertikalnom bloku u sva tri retka u bloku imamo par $\{3,7\}$ jer broj 6 ne može biti u B4 i H6, pa se radi o slučaju 2 (tri para istih brojeva). U središnjem stupcu imamo brojeve 3, 6, i 7, pa je broj 6 pomični, zbog čega je u trećem stupcu bloka par $\{4,1\}$ i jedino mjesto gdje možemo napraviti takav par u trećem kvadratu (kvadrat VIII) je drugi stupac u kojem već imamo broj 1, no zbog H7, broj 4 može ići samo u I5 i to je rješenje tog polja.

Problem možemo riješiti primjenom *TT* i na drugi način: promatramo treći (donji) horizontalni blok (HB3) i vidimo da nemamo trojke brojeve, pa moramo imati 3 para brojeva. U prvom kvadratu imamo brojeve 3, 6, 1 u drugom kvadratu 6, 1, 7 i u trećem 6, 1, 8. Iz toga je očito da je par brojeva $\{6,1\}$, a bojevi 3, 7 i 8 su pomični. Sada znademo i preostala dva para: $\{5,4\}$ i $\{9,2\}$. Par $\{4,5\}$ se nalazi u prvom kvadratu i prvom retku te trećem kvadratu i drugom retku bloka, tako da mora doći u drugi kvadrat i treći redak, dakle u I4 i I5. Sada metodom pozicioniranja lako možemo utvrditi da je broj 4 u I5, a broj 5 u I4. Koristili smo dvije metode, ali smo riješili i dva polja.

Na slici 9 je drugi primjer.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			5	8	4	6	7	9	
B				7	5	9			
C		9	7	2	3	1			5
D	1		4	6		5	3		
E				3		4			
F			3	1	2	7	8		9
G	7			5	6	3	9	2	4
H				4	1	8			
I		4	6	9	7	2	5		

Slika 9.

Probajte odrediti broj u polju I1. Gledamo HB3: u retku G imamo brojeve $\{9, 2, 4\}$, a u retku I $\{9, 7, 2\}$. Dakle imamo parove (slučaj 2) i jedan par je $\{9, 2\}$, a pomični brojevi su 4 i 7. Iz kvadrata VIII vidimo da je drugi par $\{1, 8\}$, a treći bar iz brojeva 5, 6 i 3: $\{5, 6\}$ ili $\{5, 3\}$ ili $\{3, 6\}$. Kako redak I sadrži broj 5 (u I7) stoga u I1 ide broj 3. Sada na isti način možemo odrediti i broj u polju D2: u kvadratu V nedostaju brojevi 8 i 9, pa zbog činjenice da je broj 3 pomični (zbog čega?) moguće su samo kombinacije $\{4, 8\}$ ili $\{4, 9\}$. Budući da je u C2 broj 9, proizlazi da je u polju D2 broj 8.

Na slici 10 je treći primjer.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8			3		6	x	x	
B	1	y	y			4	7	3	
C	4	3	9	7	2	1	8	5	6
D		8			7	5	9		
E	7				6	2	5	8	3
F			5		3			6	7
G	5	4	8	6	1	7	3	9	2
H	3	6	1	2			4	7	5
I				5	4	3	6	1	8

Slika 10.

Primjenom *TT* možemo odrediti broj u polju A2. Stupac 9 sadrži broj 2, pa on može biti samo u A7 ili A8, kao i u B2 ili B3, pa zbog $\{7, 2, 1\}$ u trećem retku drugog bloka i B7 $=$ 7 imamo par $\{1, 2\}$ (slučaj 2). Broj 7 je pomični, pa broj 3 nije te je iz $\{4, 3, 9\}$ drugi par $\{3, 4\}$ ili $\{3, 9\}$, 4 ne može biti zbog B6 $=$ 4 pa je A5 $=$ B9 $=$ 9. Stoga je iz prvog retka drugog kvadrata pomični broj 6, pa je treći par u trećem retku $\{5, 8\}$. Zato u prvi redak prvog kvadrata u polja A2 ili A3 treba ići broj 5 (8 imamo), a jedino polje u koje može ići je A2 i to je rješenje.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9		1	2		4		5	
B	4		8				9	1	
C			5	1	9			6	4
D			4	3	6	7			9
E			3	5	8	9	7	4	x
F	7		9	4	1	2	5	3	x
G	5	9			4				
H	3	1					4		5
I	8	4			5	1			3

Slika 11.

Primjenom *Tulejinog teorema* vrlo često se dešavaju pogreške. Sve se čini jasno i jednostavno, no previdi su vrlo česti jer se ne sagledaju sve moguće kombinacije. Pogledajte sljedeći primjer na slici 11.

U VB3 imamo u stupcu 8 $\{5,1,6\}$, a u stupcu 9 $\{3,5\}$. Iz toga zaključujemo da u bloku imamo tri para istih brojeva (slučaj 2). Iz $\{1,5,6\}$ možemo napraviti 3 para od kojih jedan treba ići u polja E9 i F9: $\{1,5\}$, $\{1,6\}$ ili $\{5,6\}$. Budući da stupac 9 već sadrži broj 5 (u H9), traženi par je $\{1,6\}$, a budući da je broj 1 u retku F (u polju F5), konačno rješenje je E9 = 1, F9 = 6. No, je li baš tako? Previdjeli smo kombinaciju $\{1,5\}$ koja može ići u stupac 7 u kvadratu VI. Sve je u redu ako smo imali sreću kao u ovom slučaju i pogodili pravo rješenje, u protivnom će nam se pojaviti kontradikcija u daljnjem rješavanju mreže (polje bez kandidata ili da u više polja povezanog područja imamo samo jednog, ali istog kandidata). Naime, ako je 5 pomični broj tada par $\{1,6\}$ ide u kvadrat VI i to tako da je E9 = 1 i F9 = 6. No ako 5 nije pomični broj, tada je zbog D5 = 6 mogući par jedino $\{1,5\}$ i D7 = G9 = 1. U D8 su mogući kandidati 2 i 8, u E9 2 i 6, a u F9 6 i 8. Analizom HB2 (drugog horizontalnog bloka) možemo vidjeti da su mogući parovi: $(1,2)$, $(6,7)$ i $(5,8)$ ili ($(8,9)$, $(2,4)$ i $(3,6)$.

U sljedećem nastavku bit će govora o još nekim metodama koje mogu pomoći pri rješavanju teških sudokua.

Lakši zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		1			4				
B			7					9	6
C	3			8					
D	2		1				5	3	
E	5				7			8	
F	4		8	3					
G						1			3
H					6				4
I	1	9	2						8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	1	5	6	4	3	8	7	2
B	8	4	7	1	5	2	3	9	6
C	3	2	6	8	9	7	1	4	5
D	2	6	1	4	8	9	5	3	7
E	5	3	9	2	7	6	4	8	1
F	4	7	8	3	1	5	6	2	9
G	6	8	4	7	2	1	9	5	3
H	7	5	3	9	6	8	2	1	4
I	1	9	2	5	3	4	7	6	8