Rješenje nagradnog natječaja br. 229

Nađi sva međusobno različita pozitivna cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 3(x + y + z + w).$$

Rješenje. Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti $x < y < z < w$. Tada je $x \geq 1$, $y \geq 2$, $z \geq 3$, $w \geq 4$,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &= 3(x + y + z + w) \\ 1 &\leq y - x \\ 9 &\leq 3z \\ 20 &\leq 5w. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih relacija, nakon sređivanja, dobivamo

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + (w-4)^2 \leq 0,$$

Odakle je $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $w = 4$.

Sva rješenja dane jednadžbe su $(1, 2, 3, 4)$ i njihove permutacije.

Knjigom Nikola Adžaga i dr., *Matematička natjecanja 2018./2019.*, Element, Zagreb, 2020. nagrađena je *Klara Mihalić* (3), Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec.

Riješili zadatke iz br. 2/278

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Zara Bičvić* (1), III. gimnazija, Osijek, 3723; *Borna Cesarec* (2), Srednja škola Krapina, Krapina, 3722, 3732; *Maja Drmač* (4), XV. gimnazija, Zagreb, 3721, 3722, 3725, 3726, 3729, 3732; *Oliver Kukas* (4), Gimnazija A. G. Matoša, Zabok, 3721–3734; *Filip Vučić* (1), XV. gimnazija, Zagreb, 3722.

b) Iz fizike: *Antonija Glasnović* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 462–465; *Porin Kotnik* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 462–465; *Borna Cesarec* (2), Srednja škola Krapina, Krapina, 1718.

Nagradni natječaj br. 231

Dokaži da za svaki pozitivan cijeli broj $n \geq 1$ jednadžba

$$x^2 + xy + y^2 = 7^n$$

ima cjelobrojno rješenje.