# Poopćenja Cassinijevog identiteta

*Ivica Martinjak*[1]

Mnogi identiteti za niz Fibonaccijevih brojeva $(F_n)_{n\geqslant 0}$ imaju svoje geometrijske reprezentacije, jednako kao i kombinatorne. Tako relacija

$$1+\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2}, \tag{1}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, očevidno slijedi iz svojstava jednakostraničnog trokuta s upisanim rombovima i trapezima čija su dva kuta $60°$. Najprije nacrtamo jednakostranični trokut s duljinama stranica jednakim 1. Zatim produljujemo dvije stranice za $F_1 = 1$ pa novi trokut ima stranice duljine $F_2 = 2$ budući smo slijedili rekurziju

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n,\ n \in \mathbb{N}_0 \\ F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

koja definira Fibonaccijeve brojeve. Nadalje, u $k$-tom koraku produljujemo stranice za $F_k$ i pritom trokutu upisujemo romb sa stranicama $F_k$ i trapez s kracima $F_k$ te osnovicama $F_{k-1}$ i $F_{k+1}$ [8].

Promotrimo li brojeve u Fibonaccijevom nizu,

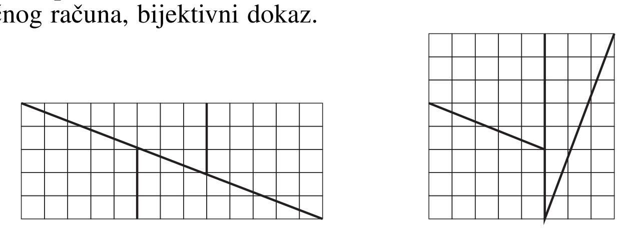
$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \ldots$$

na način da usporedimo kvadrat nekog broja i umnožak njegovih dvaju susjeda, zapažamo da je njihova razlika uvijek 1. Tu pravilnost izražava relacija

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{3}$$

poznata pod nazivom Cassinijev identitet, a ponekad se naziva i Simsonova formula. Obično je predstavljamo kao geometrijski paradoks, uz pitanje "gdje je nestao kvadratić" (slika 1). Nacrtamo pravokutnik primjerice sa stranicama $a = 5$, $b = 13$ te podijelimo njegovu površinu najprije dijagonalom, a zatim još jednom svaki dio. U drugu ruku, kvadrat stranice $c = 8$ također se može podijeliti na naizgled jednaka takva četiri dijela. Cassinijev identitet nam kaže da je razlika između površine pravokutnika i kvadrata uvijek 1 kada su $a, c, b$ uzastopni Fibonaccijevi brojevi. Točnije, pravokutnik ima za 1 veću površinu za parni $n$, a kvadrat za neparni $n$.

Cassinijev identitet se može jednostavno dokazati na nekoliko načina među kojima su najpoznatiji, dokaz pomoću Binetove formule, dokaz matematičkom indukcijom, dokaz pomoću matričnog računa, bijektivni dokaz.



*Slika 1. Slučaj Cassinijevog identiteta za* $n = 6$.

[1] Autor je asistent s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu; e-pošta: `imartinjak@phy.hr`.

Dokaz indukcijom ide ovako. Za $n = 1$ jednakost vrijedi jer je $F_0F_2 - F_1^2 = -1 = (-1)^1$. Nadalje treba pokazati da ako je tvrdnja valjana za $n = k$, onda je valjana i za $n = k + 1$ tj. onda vrijedi $F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$. Primjenom rekurzije (2) te pretpostavke indukcije dobivamo

$$\begin{aligned} F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k(F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}(F_k + F_{k-1}) \\ &= (-1)(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2) \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

čime je identitet dokazan.

U ovom radu ćemo prikazati nekoliko poopćenja i analogija ovog identiteta. Pritom ćemo vidjeti da osim lijepog geometrijskog i algebarskog prikaza, iz Cassinijevog identiteta izravno slijede još neki. To će se jasno vidjeti iz elementarnih dokaza u nastavku.

## Cassinijev i Catalanov identitet

Prije samih poopćenja Cassinijevog identiteta navedimo još jednu od osnovnih relacija koje vrijede za Fibonaccijeve brojeve

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, \tag{4}$$

a koja će nam poslužiti za dokazivanje Catalanovog identiteta te identiteta (7). Ova se relacija također može dokazati matematičkom indukcijom, no u nastavku je dokazujemo kombinatorno.

Promotrimo rastav prirodnog broja $n$ na sumande koji mogu biti samo jedinice i dvojke. Primjerice, broj 4 ima pet takvih rastava, pa pišemo $f_4 = 5$.

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 1 + 2 + 1 \\ &= 1 + 1 + 2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Nadalje se lako uvjerimo da je $f_5 = 8$, $f_6 = 13, \ldots$ odnosno da brojevi $f_i$ rastu jednako kao Fibonaccijevi brojevi. Naime, rastav broja $n$ počinje jedinicom ili dvojkom pa je broj svih rastava od $n$ jednak zbroju brojeva rastava od $n - 1$ i $n - 2$. Dakle, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ s tim da ovaj niz počinje brojevima 1, 2 pa vrijedi

$$f_n = F_{n+1}, \quad n \geqslant -1. \tag{5}$$

Sada ćemo ovu činjenicu iskoristiti za jednostavni dokaz relacije (4). Neka je

$$m + n = a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots + a_N$$

pri čemu brojevi $a_i$ poprimaju vrijednosti 1 i 2. Prema definiciji, broj ovih rastava je $f_{m+n}$. Primijetimo da za pojedini rastav postoji ili ne postoji $1 \leq i \leq N$ takav da je $\sum_{j=1}^{i} a_j = m$. Prvi od tih skupova ima $f_mf_n$ elemenata, a drugi $f_{m-1}f_{n-1}$:

$$f_{m+n} = f_mf_n + f_{m-1}f_{n-1}.$$

Sada supstituiramo $f_n = F_{n+1}$ i tvrdnja odmah slijedi.

Za $r \in \mathbb{N}_0$, Catalanov identitet proširuje Cassinijev na bilo koja dva Fibonaccijeva broja koja su u nizu za $r$ mjesta udaljena od $n$-tog člana:

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2 \tag{6}$$

Razlika u površinama pripadnih pravokutnika i kvadrata tada je jednaka kvadratu $r$-tog Fibonaccijevog broja. Nadalje se pokazuje da analogna relacija vrijedi i kada broj $n$ nije aritmetička sredina rednih brojeva drugih dvaju članova niza:

$$F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} = (-1)^nF_iF_j. \tag{7}$$

Oba ova poopćenja slijede iz identiteta (3) i (4). Dokazat ćemo općenitiji slučaj. Prema (4) slijedi

$$\begin{aligned} F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} &= (F_nF_{i+1} + F_{n-1}F_i)(F_nF_{j+1} + F_{n-1}F_j) - F_n(F_{n+i}F_{j+1} + F_{n+i-1}F_j) \\ &= F_{n-1}F_nF_{i+1}F_j + F_{n-1}^2F_iF_j - F_nF_j(F_nF_i + F_{n-1}F_{i-1}) \\ &= F_{n-1}F_nF_j(F_{i+1} - F_{i-1}) + F_iF_j(F_{n-1}^2 - F_n^2) \end{aligned}$$

Naposlijetku primjenjujemo Cassinijev identitet i time dokazujemo tvrdnju:

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_nF_jF_i + F_iF_j(F_{n-1}F_{n+1} - F_nF_{n-1} - F_n^2) &= F_{n-1}F_nF_jF_i + F_iF_j((-1)^n - F_nF_{n-1}) \\ &= (-1)^nF_iF_j. \end{aligned}$$

Napomenimo da se niz Fibonaccijevih brojeva prirodno može proširiti i na skup $\mathbb{Z}$ te tada vrijedi

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n.$$

Dakle, Catalanov identitet daje Cassinijev za $r = 1$, dok se relacija (7) svodi na Catalanov identitet za $i = -r, j = r$, a na Cassinijev za $i = -1, j = 1$.

## Posljedice Cassinijevog identiteta

Dok Cassinijev identitet datira iz sredine 18. stoljeća, identitet poznat pod nazivom Gelin-Cesàro,

$$F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} - F_n^4 = -1, \tag{8}$$

je zapažen stoljeće kasnije. Taj izraz je izravna posljedica Cassinijevog identiteta. Primjenom ujedno i Catalanovog identiteta tvrdnja odmah slijedi:

$$\begin{aligned} F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} &= F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2} \\ &= ((-1)^n + F_n^2)(F_n^2 - (-1)^{n-2}) \\ &= F_n^4 - (-1)^{2n-2} \\ &= F_n^4 - 1. \end{aligned}$$

Postavlja se sada pitanje postoji li slična relacija i za kubove Fibonaccijevih brojeva. Poznata je sljedeća jednakost, koju dokazujemo na elementaran način [6]:

$$F_{n+1}F_{n+2}F_{n+6} - F_{n+3}^3 = (-1)^nF_n. \tag{9}$$

Najprije višestrukim korištenjem rekurzije (2) izrazimo $F_{n+3}$ i $F_{n+6}$ pomoću $F_{n+1}$ i $F_{n+2}$ te na desnoj strani jednakosti zamijenimo

$$(-1)^n = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2.$$

Time dobivamo

$$2F_{n+1}F_{n+2}^2 - F_{n+1}^3 - F_{n+2}^3 = (F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2)F_n.$$

Kada i desnu stranu jednakosti izrazimo pomoću $F_{n+1}$ i $F_{n+2}$, dobivamo jednakost (9).

Cassinijev identitet nam pokazuje da razlika dvaju susjednih omjera Fibonaccijevih brojeva alternira te teži određenoj vrijednosti kako se $n$ povećava,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}.$$

Ta je vrijednost upravo omjer zlatnog reza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{10}$$

Cassinijev identitet nam također daje vezu između Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva. Niz Lucasovih brojeva $(L_n)_{n\geqslant 0}$ je definiran istom formulom rekurzije kao i Fibonaccijev, ali s početnim uvjetima $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. Iz (2) i (3) se lako dobije relacija

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n. \tag{11}$$

koja pokazuje da su brojevi $F_n, L_n$ rješenja diofantske jednadžbe $x^2 - 5y^2 = 4(-1)^n$.

## Još neki identiteti

Vrijedi spomenuti da i identitet (4) ima zanimljive posljedice. Tako,

$$\begin{aligned} F_{2n} = F_{n+n} &= F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}), \end{aligned}$$

što daje

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2. \tag{12}$$

Nadalje se može pokazati da za $F_{3n}$ vrijedi

$$F_{3n} = 3F_nF_{n+1}^2 - 3F_n^2F_{n+1} + 2F_n^3.$$

Ako nas ova relacija asocira na binomni poučak, odnosno binomne koeficijente, to nije slučajno. Ne samo da se Fibonaccijev broj može dobiti kao suma brojeva u Pascalovom trokutu,

$$F_{n+2} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n-k+1}{k},$$

nego ćemo vidjeti da postoji čitava familija identiteta (13), kojoj su prethodna dva specijalni slučajevi, i kod kojih se javljaju binomni koeficijenti.

$$F_{kn+c} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} F_{c-i}F_n^iF_{n+1}^{k-i}, \quad k, c \in \mathbb{N}_0. \tag{13}$$

Dokaz ove relacije ćemo izvesti istim pristupom kao i kod dokaza identiteta (4). Broj $kn + c - 1$ možemo rastaviti na $f_{kn+c-1}$ načina na sumande koji su jedinice ili dvojke. Podijelimo sada svaki od tih rastava na $k+1$ dijelova, tako da zbroj $j_i$, $1 \leq i \leq k$ sumanada u pojedinom od prvih $k$ podrastava bude $n$, a kada to nije moguće onda $n-1$:

$$kn + c - 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 2}_{j_1} + \cdots + \underbrace{1 + 2 + \cdots + 1}_{j_k} + \underbrace{2 + 1 + \cdots + 2}_{j_{k+1}}$$

$$kn + c - 1 = j_1 + j_2 + \cdots + j_k + j_{k+1}$$

Sada se pojedini rastav broja $kn + c - 1$ sastoji od *i)* $i$ rastava broja $n-1$,

*ii)* $k-i$ rastava broja $n$ i

*iii)* $(k+1)$-og rastava od $c-1-i$.

Broj tih rastava je, redom, $f_{n-1}^{i}$, $f_{n}^{k-i}$ te $f_{c-i-1}$. Kada još uzmemo u obzir sve moguće kombinacije redoslijeda $i$ podrastava na $k$ mjesta, dobivamo

$$f_{kn+c-1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_{c-i-1} f_{n-1}^{i} f_{n}^{k-i},$$

iz čega supstitucijom (2) odmah dobivamo identitet (13).

Fibonaccijevi brojevi imaju i mnoga druga zanimljiva i intrigantna svojstva te su prisutni kako u matematici tako i puno šire.

**Zadatak 1.** Kolika je razlika između kvadrata $n$-tog trokutastog broja $t_n$, $t_n = \sum_{i=1}^{n} i$, i umnoška brojeva $t_{n-1}$ i $t_{n+1}$?

**Zadatak 2.** Dokažite da za Lucasove brojeve Cassinijeva formula glasi

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1}.$$

## Literatura


[1] B. Bakula, Z. Franušić, *Matrice s Fibonaccijevim brojevima*, math.e **26**, `http://e.math.hr/broj_26/Bakula`

[2] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, *Proofs that Really Count*, The Mathematical Association of America, Washington, 2003.

[3] Andrej Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.

[4] Andrej Dujella, *Fibonaccijevi brojevi i geometrija*, Matka **14** (1995), 60–65.

[5] Lj. Kuljanac, S. Varošanec, *Dokazi bez riječi,* $64 = 65$ *i zlatni rez*, math.e **8**, `http://e.math.hr/old/64je65/index.html`

[6] R. S. Melham, *A Fibonacci Identity in the Spirit of Simson and Gelin-Cesàro*, Fibonacci Quart. **41** (2) (2003), 142–143.

[7] Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[8] H. R. Walser, *Proof Without Words: Fibonacci Trapezoids*, Math. Mag. **84** (2011), 295.