Poboljšanja nekih nejednakosti kod trokuta

Edin Ajanović[1] *i Šefket Arslanagić*[2]

Poopćavanja nekih nejednakosti u matematici je vrlo interesantno, važno i kreativno, mada je često dosta teško i složeno. Tu nema neke univerzalne metode pa ćemo prikazati nekoliko primjera na nekim nejednakostima koje se pojavljuju kod rješavanja raznih zadataka u vezi s trokutom.

Primjer 1. Ako su a, b, c duljine stranica (nedegeneriranog) trokuta i $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ njegov poluopseg, vrijedi ova nejednakost

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) < 3s^2. \tag{1}$$

Dokaz. Za dva pozitivna realna broja vrijedi nejednakost $G_2 \leq A_2$ između geometrijske i aritmetičke sredine, pri čemu se jednakost dostiže ako i samo ako su ta dva broja jednaka. Njezinom primjenom dobivamo

$$\sqrt{a(b+c)} < \frac{a+(b+c)}{2} = s, \quad \text{tj.}$$

$$a(b+c) < s^2. \tag{2}$$

(Stroga nejednakost vrijedi jer trokut nije degeneriran.) Analogno se dobiva

$$b(c+a) < s^2, \tag{3}$$

$$c(a+b) < s^2. \tag{4}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo (1).

Sada ćemo poboljšati nejednakost (1), tj. pokazat ćemo strožu nejednakost:

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) \leq \frac{8}{3}s^2, \tag{5}$$

jer je očito $\frac{8}{3}s^2 < 3s^2$. Ovdje ćemo koristiti sljedeću pomoćnu nejednakost

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca), \tag{6}$$

koja neposredno slijedi iz očigledne nejednakosti

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0. \tag{7}$$

Imamo

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2(ab+bc+ca),$$

a iz (6)

$$\begin{aligned} a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) &\leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2, \\ &= \frac{8}{3}s^2. \end{aligned}$$

Ovo je upravo nejednakost (5). Iz (7) se vidi da jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$, tj. ako je trokut jednakostraničan.

[1] Student matematike.
[2] Autor je izvanredni profesor u miru s Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Primjer 2. Za trokut iz primjera 1 vrijedi nejednakost

$$a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)<\frac{3}{4}s^2. \tag{8}$$

Dokaz. Koristeći nejednakost $H_2 \leq A_2$ između harmonijske i aritmetičke sredine za dva pozitivna realna broja dobivamo

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{s-a}}<\frac{a+(s-a)}{2}=\frac{s}{2},$$

odnosno,

$$a(s-a)<\frac{s^2}{4}. \tag{9}$$

Sličnim postupkom dobivamo

$$b(s-b)<\frac{s^2}{4}, \tag{10}$$

$$c(s-c)<\frac{s^2}{4}. \tag{11}$$

(Ako bi u (9), (10) i (11) vrijedila jednakost, imali bismo $a=s-a$, $b=s-b$, $c=s-c$, tj. $3a=b+c$, $3b=c+a$, $3c=a+b$. Zbrajanjem ovih triju jednakosti dobili bismo $3=2$, što je proturječje.) Zbrajanjem ovih triju nejednakosti dobivamo (8).

Sada ćemo dokazati poboljšanje ove nejednakosti koje glasi

$$a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)\leq\frac{2}{3}s^2, \tag{12}$$

jer je $\frac{2}{3}s^2<\frac{3}{4}s^2$. Lijevu stranu dane nejednakosti možemo zapisati u obliku

$$a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)=2s^2-(a^2+b^2+c^2),$$

a odavde zbog

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca, \tag{13}$$

odnosno

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{4}{3}s^2,$$

imamo

$$a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)\leq\frac{2}{3}s^2,$$

a to je upravo nejednakost (12). Jednakost u (12) vrijedi ako i samo ako vrijedi jednakost u (13), tj. ako je $a=b=c$.

Primjer 3. Ako je P površina trokuta, a R i r polumjeri opisane i upisane mu kružnice, tada vrijedi

$$P > 2r\sqrt{Rr}. \tag{14}$$

Dokaz. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$a+b+c > 2a, \quad a+b+c > 2b, \quad a+b+c > 2c,$$

a nakon množenja ovih nejednakosti (uz $a+b+c=2s$) dobivamo

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &> 8abc, \\ s^3 &> abc, \\ \left(\frac{P}{r}\right)^3 &> 4RP, \\ P &> 2r\sqrt{Rr}, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. A sada ćemo dokazati poboljšanje ove nejednakosti, tj.

$$P \geq \frac{3\sqrt{6}}{2} r\sqrt{Rr}, \tag{15}$$

jer je $\frac{3\sqrt{6}}{2} > 2$. Koristit ćemo nejednakost $A_3 \geq G_3$ između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna realna broja tj.

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Ova nejednakost ekvivalentna je redom sa sljedećima:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^3}{27} &\geq abc, \\ \frac{8s^3}{27} &\geq abc, \\ \frac{8s^2}{27} &\geq \frac{abc}{s}, \\ \frac{8}{27}\cdot\frac{P^2}{r^2} &\geq \frac{4RP}{\frac{P}{r}}, \\ P &\geq \frac{3\sqrt{6}}{2} r\sqrt{Rr}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] O. Bottema, and others, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.