Poboljšanje jedne geometrijske nejednakosti

Šefket Arslanagić[1]

Poboljšati neku nejednakost je značajan i kreativan posao u matematici. Ovdje ćemo prikazati poboljšanje jedne geometrijske nejednakosti u trokutu koja glasi

$$s \geqslant 3\sqrt{3}r, \tag{1}$$

gdje je s njegov poluopseg, a r polumjer upisane mu kružnice.

Najprije ćemo prikazati tri razna dokaza ove nejednakosti.

Dokaz 1. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, imamo (zbog $abc = 4RP$)

$$2s = a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{4RP},$$

a odavde koristeći poznatu jednakost $P = rs$ i *Eulerovu nejednakost* $R \geqslant 2r$, dobivamo

$$2s \geqslant 3\sqrt[3]{4Rrs} \geqslant 3\sqrt[3]{8r^2s},$$

odnosno

$$s \geqslant 3\sqrt{3}\,r.$$

Jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$ (jednakostraničan trokut).

Dokaz 2. Opet na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{2}$$

Koristeći *Heronovu formulu* za površinu trokuta, $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dobivamo

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s} = \frac{r^2s^2}{s} = r^2s. \tag{3}$$

Sada iz (2) i (3) dobivamo

$$s \geqslant 3\sqrt[3]{r^2s} \iff s \geqslant 3\sqrt{3}r.$$

Dokaz 3. Koristit ćemo poznate formule koji se odnose na polumjere r_a, r_b, r_c pripisanih kružnica trokutu:

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c} \tag{4}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \tag{5}$$

$$r_ar_br_c = sP. \tag{6}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{r_ar_br_c}},$$

[1] Autor je izvanredni profesor u miru s Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

a odavde iz (5) i (6)

$$\frac{1}{r} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{sP}},$$

odnosno

$$\frac{1}{r} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{rs^2}} \iff s \geqslant 3\sqrt{3}r.$$

Nejednakost (1) je ekvivalentna nejednakosti

$$s^2 \geqslant 27r^2. \tag{1'}$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi sljedeće poboljšanje nejednakosti (1') (odnosno (1)) koje glasi

$$s^2 \geqslant 27r^2 + \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]. \tag{7}$$

Dokaz. Koristit ćemo poznate jednakosti koje vrijede za trokut:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(s^2 - r^2 - 4Rr\right) \tag{8}$$

i

$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr. \tag{9}$$

Sada zbog (8) i (9) imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \\ &= 2\left(s^2 - r^2 - 4Rr\right) - \left(s^2 + r^2 + 4Rr\right) \\ &= s^2 - 3r^2 - 12Rr. \end{aligned} \tag{10}$$

Koristeći (10) sada dobivamo

$$\begin{aligned} & s^2 \geqslant 27r^2 + \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \\ \iff\ & s^2 \geqslant 27r^2 + s^2 - 3r^2 - 12Rr \\ \iff\ & 12Rr \geqslant 24r^2 \\ \iff\ & R \geqslant 2r, \end{aligned}$$

a ovo je dobro poznata *Eulerova nejednakost*. Dakle, vrijedi i nejednakost (poboljšanje) (7).

Jednakost u (7) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$ (jednakostraničan trokut).

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.

[3] O. Bottema, i ostali, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.