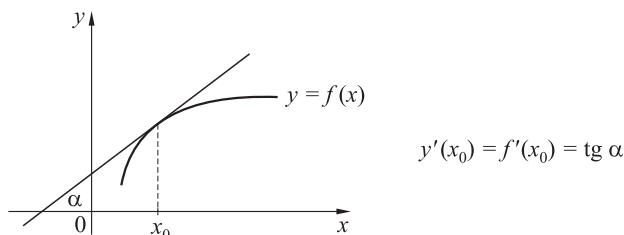


Uvod

Dobitnici Abelove nagrade za 2015. godinu su američki matematičar *John F. Nash, Jr.* (1928.–2015.) sa Sveučilišta Princeton i kanadsko-američki matematičar *Louis Nirenberg* s Courantovog instituta za matematiku Sveučilišta u New Yorku. Nagrada im je dodijeljena za bitne i trajne doprinose u teoriji nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačini i njihovim primjenama u geometrijskoj analizi.

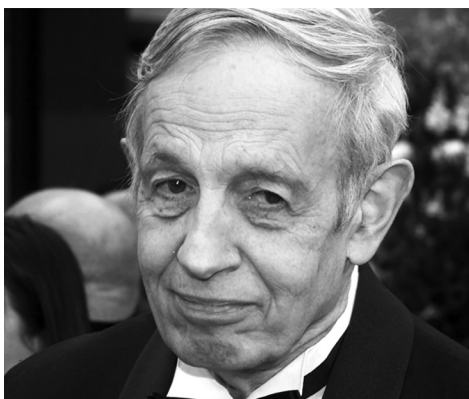
Pokušajmo u grubim crtama objasniti njihova postignuća, ali se najprije podsjetimo osnovnog fizikalnog (Newtonovog) načela derivacije: *brzina = derivacija puta po vremenu*. Općenito, svaka promjena stanja nekog fizikalnog postupka (procesa) opisuju se derivacijama izvjesnih funkcija. S druge strane, geometrijski (Leibnizov) smisao derivacije je nagib tangente (ili diralice) na krivulju. Točnije, derivacija funkcije f u točki x je tangens kuta što ga graf od $y = f(x)$ u točki $(x, f(x))$ čini s pozitivnim smjerom osi x ; oznaka je $y' = f'(x)$.



Derivacija prve derivacije je druga derivacija $y'' = (y')'$, derivacija druge je treća derivacija itd. Obična diferencijalna jednačina (ODJ) je jednačina u kojoj se traže sve nepoznate funkcije f jedne varijable a u kojoj sudjeluju i njene derivacije f', f'' itd. Primjerice, ODJ $y' = 3$ ima sva realna rješenja $y = 3x + C$, gdje je C bilo koja realna konstanta. Parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ) je jednačina u kojoj se traže sve funkcije više varijabli a u kojoj sudjeluju parcijalne (djelomične) derivacije. Parcijalna (djelomična) derivacija funkcije više varijabli je derivacija po jednoj varijabli pri čemu se ostale smatraju konstantnima (sjetimo se, derivacija konstante C jednaka je nuli, $C' = 0$).

Mnoge prirodne pojave, procesi i fenomeni se opisuju sustavom PDJ u više varijabli. Rješavanje sustava PDJ tj. nalaženje svih rješenja sustava je u pravilu vrlo teško i uglavnom se radi o *nemogućoj misli*. Ali su zato kvalitativna topološka i geometrijska slika skupa rješenja sustava PDJ poželjna i katkad moguća i upravo su za taj aspekt teorije PDJ Nash i Nirenberg dobili Abelovu nagradu.

¹ Autor je redoviti profesor u miru s Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu; e-pošta: darko.veljan@gmail.com



John Forbes Nash,



Louis Nirenberg

Nash i teorija igara

Osim Abelove, Nash je još 1994. dobio i prestižnu Nobelovu nagradu iz ekonomije za doprinose iz teorije igara, pa kažimo ovdje nešto o tome. Teorija igara je novija matematička disciplina, nastala kasnih 1930-ih godina, naročito pojavom knjige J. von Neumanna i O. Morgensterna *Theory of Games and Economic Behavior* (Teorija igara i ekonomsko ponašanje), Princeton, 1944. John Nash je 1950. obranio svoju doktorsku disertaciju *Non Cooperative Games* (Igre bez suradnje).

Glavne ideje iz tog manjeg rada postale su vremenom poznate kao *The Nash equilibrium* (Nashova ravnoteža), i za to je dobio Nobelovu nagradu. Nashova ravnoteža kao oruđe omogućava nam da u analizi konfliktnih situacija pronađemo predviđanje kako će se ljudi u njima ponašati zadovoljavajući svoje želje i potrebe. Ideja Nashove ravnoteže našla je primjene ne samo u ekonomiji nego i u područjima kao teorijsko računarstvo, sociologija, evolucijska biologija ili umjetna inteligencija i drugim.

Teorija igara je precizno matematičko proučavanje situacija u kojima se na temelju konflikata, tj. međusobno naizgled različitih interesa, raspolaganjem podataka i strategija razvoja društva ili sličnih situacija, moraju donijeti optimalne odluke (*decision-making processes*).

Na primjer, uzmimo da kupujete stan od agencije za nekretnine. Svatko od tri sudionika ove *ekonomske igre* ima svoje interese i želje: kupac (K) želi kupiti stan određene kvalitete po najpovoljnijoj (najmanjoj) cijeni, prodavač (P) prodati stan po najpovoljnijoj (što većoj) cijeni, a agencija (A) koja prodaje stan pri tom dobiva najveći postotak (2%–5%) ovisno o cijeni koju je postigla pregovorima oko prodaje s ostala dva sudionika *igre*. Postoji li za svakog od njih najpovoljnija odluka uz pretpostavku da pritom ni jedan od ostalih ne postiže ništa bolje promjenom svoje strategije? Odgovor je potvrđan i tada su ta tri igrača (K, P, A) postigli Nashovu ravnotežu.

Nashov teorem kaže da se uz određene pretpostavke može postići takva i on je zapravo posljedica jednog klasičnog teorema iz topologije iz 1912. poznatog pod nazivom Brouwerov teorem o fiksnoj točki, a kaže da svako neprekidno preslikavanje kugle u samu sebe ima fiksnu (čvrstu) točku. O tom teoremu možete više naći u članku M. Stojanović i D. Veljan, *Zgužvani papiri, čaša limunade, rukovanje, vjetar na Zemlji i Brouwerov teorem o fiksnoj točki*, MFL, 2013./ 14. U stvari je u dokazu svojeg teorema

o ravnoteži Nash koristio tzv. Kakutanijev teorem o fiksnoj točki (iz 1940.), a taj je teorem, iako naizgled općenitiji, ipak ekvivalentan Brouwerovom teoremu.

Evo jedne od vrlo popularnih priča o primjeni Nashove ravnoteže.

Dvojba zatvorenika (u svjetskoj literaturi poznata pod nazivom *prisoner's dilemma*). Dvoje optuženika A i B su zajedno počinili kazneno djelo i pod istragom su na unakrsnom ispitivanju u odvojenim prostorijama u državnom odvjetništvu koje nema pouzdane dokaze o počinjenju kaznenog djela. Optuženici se nadaju da će svatko dobiti godinu dana zatvora za lakše optužbe. No državni odvjetnik svakome od njih ponudi nagodbu. Svatko od njih dvoje može izdati onog drugog optužujući ga da je sam počinio kazneno djelo ili šutnjom podržavati jedan drugoga. Ponude su sljedeće:

- 1) Ako svatko od A i B izda drugoga, svaki će dobiti 2 godine zatvora;
- 2) Ako A izda B , ali B se brani šutnjom, A će biti oslobođen, a B će dobiti 3 godine zatvora (i obrnuto);
- 3) Ako se A i B odluče na obranu šutnjom, oboje će dobiti po 1 godinu zatvora (s manjom optužbom).

Dakle, svako od A i B sam za sebe neće proći gore ako izda onog drugog bez obzira što onaj drugi odluči. No zaključivanje donosi ovu dvojbu: B će ili surađivati s A ili će ga izdati. Ako će B surađivati, onda bi A trebao izdati, jer je sloboda bolja od 1 godine zatvora. Ako pak B izda, onda bi i A trebao izdati, jer je 2 godine bolje od 3 godine zatvora. Dakle, u svakom slučaju, A treba izdati. Slično zaključivanje je da i B treba izdati. Znači, kad jedan drugog izdaju, onda se ni jednom od njih ne može dogoditi gora kazna jednostranom promjenom strategije, tj. oni su tu postigli Nashovu ravnotežu. Dilema se sastoji u tome da međusobna kooperativnost daje bolji rezultat od međusobne optužbe, ali to nije racionalno ponašanje s osobnog, sebičnog stajališta, tj. kooperativnost je s osobne razine iracionalno ponašanje.

Nashovi i Nirenbergovi doprinosi čistoj matematici

Kao mladi znanstvenik na Sveučilištu Princeton Nash je postigao neke od svojih najvažnijih doprinosa u matematici. Jedno od njegovih prvih značajnih znanstvenih prodora je teorem koji kaže da se svaka mnogostrukost (topološki, ploha je 2-dimenzionalna mnogostrukost) može opisati s nekom algebarskom mnogostrukošću, tj. geometrijskim objektom dobivenim s algebarskim jednažbama.

Nakon što je 1951. prešao s Princetona na Sveučilište MIT u Bostonu, Nash se počeo zanimati za probleme smještavanja Riemannovih mnogostrukosti. Najpoznatiji među tim problemima je bio je li moguće takvu mnogostrukost smjestiti u neki Euklidski prostor tako da se sačuvaju udaljenosti ili, kako se stručno kaže, smjestiti izometrički? Nash je 1956. dokazao da se svaka (kompaktna) Riemannova mnogostrukost dimenzije n može izometrički i k tome glatko smjestiti u neki N -dimenzionalan Euklidski prostor. U tu je svrhu trebalo riješiti izvjestan sustav PDJ, ali je uvidio da ne treba eksplicitna rješenja, nego su on i Moser našli iterativnu metodu (Nash-Moserov teorem) kojim su izbjegli potrebu za eksplicitnim rješenjima. Poznati geometričar Mihael Gromov (Abelovac za 2009.) jednom je rekao da Nashove radove iz geometrije smatra puno važnijim od onih iz matematičke ekonomije za koje je Nash dobio Nobelovu nagradu.

Spomenimo ovdje da je hrvatski matematičar Danilo Blanuša 1955. prvi uspio izometrički i glatko smjestiti hiperboličku ravninu (Riemannovu 2-mnogostrukost s konstantnom negativnom zakrivljenošću) u 6-D Euklidski prostor; Nash je citirao

Blanušin rad (više o Blanuši može se naći u članku D. Veljan, *Akademik Danilo Blanuša – matematičar i profesor*, *Prirodoslovlje*, 14 (1-2) (2014)).

Nash je ranih 1950-ih posjetio Courant Institute u New Yorku gdje je upoznao Louisa Nirenberga. Uskoro su zajedno počeli raditi na velikom otvorenom problemu iz nelinearne teorije oko nejednakosti pridruženih sustavu eliptičkih PDJ. Nash je ubrzo dokazao postojanje takvih nejednakosti. Do sličnog je rezultata neovisno došao talijanski matematičar De Giorgi i danas je ta činjenica poznata kao Nash-De Giorgijev teorem.

Nash nije bio strogo ograničen na jedno područje djelovanja, nego je volio izazove rješavanja teških otvorenih problema iz raznih područja matematike koje bi rješavao posve novim načinima razmišljanja. Louis Nirenberg je odgovarajući na novinarsko pitanje da li zna nekog matematičara-genija, odgovorio da zna i da je to John Nash i da on razmišlja o problemima nekonvencionalno i potpuno drukčije od ostalih ljudi.

Nashovo ne-glatko (ali C^1) smještenje je kasnije poboljšao Kuiper pokazavši da je takvo smještenje ipak moguće iako se dugo smatralo da ga onemogućuju geometrijske invarijante kao što je Gaussova zakrivljenost. Te je teoreme koristio i M. Gromov, a korišteni su i u nedavnim značajnim prodorima u teoriji regularnosti inkompresibilnih protoka tekućina.

Louis Nirenberg je, s druge strane, dokazao temeljne teoreme o smještanju 2-sfere u Euklidski 3-prostor s unaprijed zadanom Gaussovom zakrivljenošću ili Riemannovom metrikom i time riješio klasične probleme koje su postavili Minkowski, Weyl i dr. (oko 1910.) – kasnije Pogorelov.

Nashov teorem da se mnogostrukosti mogu u stvari realizirati kao realne algebarske mnogostrukosti i Newlander-Nirenbergov teorem o kompleksnim strukturama na mnogostrukostima su bitni doprinosi geometriji mnogostrukosti.

Svojstva simetrije rješenja nelinearnih PDJ koje je razvio Nirenberg sa suradnicima također su u bitnome pridonijela boljem razumijevanju kvalitativnih svojstava skupa rješenja kao i u pojednostavnjenju numeričkih računanja – nalaženja približnih rješenja.

Navedimo na kraju samo nekoliko pojmova koje i danas nose imena ovih dvaju nagrađenih matematičara: Nash-Moserov teorem o inverznim funkcijama, Kohn-Nirenbergova teorija pseudodiferencijalnih operatora, Nashova nejednakost, Gagliardo-Nirenbergova nejednakost i općenitije Nirenbergove interpolacijske nejednakosti, Nashov teorem o smještanju, kao i brojni drugi pojmovi i teoremi koji se i danas rabe ne samo u matematici nego i u fizici, kemiji, biologiji ekonomiji itd.

Iz biografija Nasha i Nirenberga

John F. Nash, Jr. je rođen 1928. u Bluefieldu, West Virginia, SAD, u malom mjestu podno gorja Appalachian. Otac mu je bio elektroinženjer a majka učiteljica. Nakon srednje škole upisao je studij kemijskog inženjerstva na Carnegie Mellon Sveučilištu u Pittsburghu, da bi ubrzo prešao na studij matematike. Upisao je i izborne predmete iz ekonomije i time stekao osnovna znanja iz nje što mu je dalo inspiraciju da kao student druge godine doktorskog studija na Princetonu napiše svoj prvi članak *The Bargaining Problem* (Problem cjenkanja). Doktorirao je 1950. s tezom *Non-Cooperative Games* (Igre bez suradnje), čime je otvorio novo područje u teoriji igara. Godine 1951. prelazi na MIT gdje postaje instructor. Tamo se počeo baviti Riemannovom geometrijom o čemu je već bilo riječi.

Negdje u tim godinama Nash je također počeo raditi i kao konzultant poduzeća RAND Corporation, civilne tvrtke koju je financirala vojna industrija iz Santa Monice u Kaliforniji. 1956. je dobio stipendiju Sloanove fundacije i proveo godinu dana na Princetonu i često odlazio u New York gdje se upoznaje s Nirenbergom koji mu je prvi savjetovao da pokuša razmišljati o otvorenom problemu iz nelinearne teorije PDJ, konkretno o nejednakostima vezanim za eliptičke PDJ, a njihovu je egzistenciju Nash dokazao nekoliko mjeseci kasnije.

John Nash je navodno u svojoj mladosti bio poprilično *otkačen* i svjestan svoje intelektualne moći i *genijalnosti*. Zato se i sam raspitivao kod vrhunskih znanstvenika (uglavnom matematičara i fizičara) o glavnim neriješenim problemima koje bi on mogao riješiti. I kao što znamo riješio je problem iz teorije igara i probleme iz Riemannove geometrije po kojima je postao znanstvena *mega zvijezda*.

Nash se 1957. oženio sa studenticom fizike na MIT-u Aliciom Larde. Kad je ona 1959. trebala roditi njihovog sina, Nash je počeo dobivati paranoične i šizofrene napadaje praćene deluzijama i raznoraznim prikazama. Zato je morao dati otkaz na MIT-u i narednih 40-ak godina je mogao ozbiljno raditi matematička istraživanja samo u rijetkim trenucima. Čitava vrijeme supruga Alicia (uz kraće razdoblje rastave) se brinula za njega i pomagala mu, da bi se sredinom 1990-ih postupno počeo oporavljati od te mentalne bolesti.

Od tog je vremena, nadalje, primio niz nagrada i priznanja. Kako smo već rekli, Nobelovu nagradu za ekonomiju dobio je 1994. (koju su s njim podijelili J. C. Harsanyi i R. Selten). Godine 1996. je izabran u članstvo Nacionalne akademije znanosti SAD-a, a 1999. je dobio prestižnu Steeleovu nagradu Američkog matematičkog društva (AMS) za trajni doprinos znanosti za teorem o smještanju iz 1956. (koju je s njim podijelio M. Crandall).

2001. godine je o njegovom osebujnom životu snimljen film *A Beautiful Mind* (kod nas poznat kao *Genijalni um*). Taj je film dobio nagradu Oscar Američke filmske akademije, a Nasha je u filmu igrao poznati glumac Russell Crowe. Na scenariju je osim autorice knjige, Sylvie Nasar, surađivao i sam Nash.

Nakon dodjele Abelove nagrade u Oslu, na putu kući 23. 5. 2015. u New Jerseyju, indijski taksist koji ih je prevezio izgubio je kontrolu nad vozilom, udario u stup i izazvao sudar pri čemu su John Nash i supruga Alicia na mjestu poginuli. Tako je Nash tragično završio svoj život ne dočekavši kućno slavlje povodom Abelove nagrade.

Navodno je Nash matematičaru Cedricu Villaniju par dana prije smrti najavio da je otkrio zamjenu za Einsteinovu teoriju relativnosti te da bi to moglo pomoći u istraživanju kvantne gravitacije. Naime, Einsteinova opća teorija relativnosti iz 1915. definira gravitaciju ne samo kao privlačnu silu dvaju tijela nego i kao prostorno-vremenski (4D) fenomen prema kojem povećanjem mase i vrijeme prolazi sporije, a što bi nam jednom moglo pomoći da putujemo kroz vrijeme. A sve se to, navodno, može opisati s izvjesnim PDJ-ama.

Louis Nirenberg je rođen 1925. u Hamiltonu, Kanada, a odrastao u Montrealu, gdje mu je otac bio učitelj hebrejskog jezika. Za matematiku se počeo zanimati u ranoj dobi kad mu je njegov instructor hebrejskog stalno zadavao matematičke zagonetke. Studirao je matematiku i fiziku na Sveučilištu McGill u Montrealu i budući da su u Kanadi studenti prirodnih i matematičkih znanosti bili izuzeti iz vojne službe u Drugom svjetskom ratu, Nirenberg je diplomirao već 1945. godine.

Nakon kraćeg rada na projektu kanadske vlade na atomskoj bombi, Nirenberg, uz pomoć rodbinskih veza, odlazi na New York University (NYU), Odsjek za matematiku, gdje 1947. stječe stupanj magistra, a 1949. doktorat znanosti, riješivši Weylov problem

iz 1920-ih: može li se 2-dimenzionalna sfera s pozitivnom zakrivljenošću izometrički smjestiti u Euklidski 3-prostor kao konveksna ploha? Nirenberg je problem sveo na problem iz nelinearnih eliptičkih PDJ. Teorija nelinearnih eliptičkih PDJ je bila i ostala najvažnija znanstvena preokupacija Nirenbergovih istraživanja.

Cijeli radni vijek Nirenberg je proveo na Odsjeku za matematiku NYU, zapravo na (kasnije prozvanim) Courant Institute of Mathematical Sciences. Redoviti je profesor postao 1957., a od 1970. do 1972. je bio i direktor Courantovog instituta. Bio je odličan predavač i pisac, a bio je i voditelj oko 40 doktorata. U mirovinu je otišao 1999., a i dalje živi na Manhattanu u New Yorku.

Gotovo sve svoje znanstvene članke napisao je u suradnji s drugim matematičarima, a i neumorno je putovao na konferencije, kongrese i susrete. Tako je, primjerice, bio na prvom velikom susretu matematičara SAD – ŠSR u Novosibirsku u Rusiji 1963., a i među prvima je od vodećih američkih matematičara posjetio Kinu početkom 1970-ih.

Dobio je više nagrada i priznanja. Na primjer, Bocherovu memorijalnu nagradu AMS-a 1959., Crafoordovu nagradu 1982. (zajedno s Vladimirom Arnoldom), Steelovu nagradu AMS-a 1994. i Nacionalnu medalju za znanost u SAD – najveće priznanje za znanost u SAD. Na koncu je 2010. dobio Chernovu medalju za životno djelo koju dodjeljuje International Mathematical Union (Međunarodna matematička zajednica, poznata pod skraćenicom IMU) i Chernova fundacija. Konačno 2015., kako već znamo, dobio je i najveće stručno priznanje Abelovu nagradu.