Transcendentnost vrijednosti trigonometrijskih funkcija od racionalnog broja radijana

Petar Svirčević[1]

U prvom razredu srednje škole smo definirali iracionalnost brojeva, te pokazali da je $\sqrt{2}$ *iracionalan, tj. ne može se prikazati u obliku racionalnog razlomka. Dok smo u drugom razredu pokazali da je* $\log 2$ *također iracionalan. Za te dokaze smo koristili metodu kontradikcije uvažavajući princip tertium non datur. Svakako, da smo mogli ta razmatranja proširiti na određene klase brojeva. Nadalje je rečeno, da klasu algebarskih brojeva čine samo oni brojevi, koji mogu biti rješenja algebarskih jednadžbi s cjelobrojnim koeficijentima. Na osnovu toga smo zaključili da je* $\sqrt{2}$ *i algebarski broj, jer je isti jedno rješenje jednadžbe* $x^2 - 2 = 0$, *dok se može dokazati (što nije jednostavno) da* $\log 2$ *nije algebarski broj, već je transcendentan. Naime, transcendentni broj ne može biti rješenje algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima. Na osnovu rečenog zaključujemo, da algebarski brojevi mogu biti racionalni i iracionalni. Nadalje, transcendentni brojevi su uvijek iracionalni, ali obrat ne vrijedi. Može se pokazati, da je transcendentni broj rješenje algebarske jednadžbe beskonačnog stupnja. Osim toga, koristit ćemo, bez dokaza, da su* $\dfrac{1}{\pi}$ *i* $\dfrac{180m}{n\pi}$ $(n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{Z},\ m \neq 0)$ *transcendentni brojevi. Uvažimo li izneseno, na kraju ćemo dokazati da je vrijednost trigonometrijskih funkcija od racionalnog broja radijana uvijek transcendentni broj.*

[1] Autor je profesor u miru iz Željezničke škole u Zagrebu; e-pošta: *petar.svircevic@zg.t-com.hr*

Promotrimo binomnu potenciju jednog specijalnog kompleksnog broja. Naime, ako je $n \in \mathbf{N}$, tada iz

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \left(\cos \frac{1}{n} \cdot 1^\circ + i \sin \frac{1}{n} \cdot 1^\circ\right)^{45n} = (\cos\phi + i \sin\phi)^p \quad (1)$$

dobivamo

$$\phi = \frac{1}{n} 1^\circ, \quad p = 45n \in \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3\}. \quad (2)$$

Uzmemo li $p = 4k$, imamo

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = & \binom{4k}{0}\cos^{4k}\phi + i\binom{4k}{1}\cos^{4k-1}\phi\sin\phi - \binom{4k}{2}\cos^{4k-2}\phi\sin^2\phi \\ & - i\binom{4k}{3}\cos^{4k-3}\phi\sin^3\phi + \binom{4k}{4}\cos^{4k-4}\phi\sin^4\phi \\ & + i\binom{4k}{5}\cos^{4k-5}\phi\sin^5\phi - \ldots,\end{aligned}$$

a iz ove jednakosti dobivamo, nakon primjene zakona o jednakosti kompleksnih brojeva,

$$\begin{aligned}&\binom{4k}{0}\cos^{4k}\phi\sin^0\phi - \binom{4k}{2}\cos^{4k-2}\phi\sin^2\phi - \ldots + \binom{4k}{4k}\cos^0\phi\sin^{4k}\phi \\ &= \binom{4k}{1}\cos^{4k-1}\phi\sin^1\phi - \binom{4k}{3}\cos^{4k-3}\phi\sin^3\phi - \ldots - \binom{4k}{4k-1}\cos^1\phi\sin^{4k-1}\phi.\end{aligned}$$

Ako ovu jednakost podijelimo s $\cos^{4k}\phi$, dobivamo algebarsku jednadžbu

$$\binom{4k}{0} - \binom{4k}{2}x^2 - \ldots + \binom{4k}{4k}x^{4k} = \binom{4k}{1}x - \binom{4k}{3}x^3 - \ldots + \binom{4k}{4k-1}x^{4k-1}, \quad (3)$$

gdje je

$$x = \operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\frac{1}{n}\cdot 1^\circ = \operatorname{tg}\frac{\pi}{180n}. \quad (4)$$

Jasno je da jednadžba (3) ima algebarska rješenja. Lako zaključujemo, da bi algebarske jednadžbe dobili i za ostale vrijednosti od parametra $p = 45n \in \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}$, a to znači da su (4) uvijek algebarski brojevi. Ako uvažimo i ove formule:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad (5)$$

onda možemo reći, da je vrijednost svih trigonometrijskih funkcija od $\phi = \dfrac{\pi}{180n}$ algebarski broj.

No, moramo tvrdnju o algebarskim brojevima proširiti, tako da se odnosi na sve kutove čija je mjera bilo koji racionalni broj stupnjeva. To ćemo jednostavno postići, ako uvažimo, da je $\operatorname{tg}2\phi = \operatorname{tg}\dfrac{2}{n}1^\circ = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{n}1^\circ + \dfrac{1}{n}1^\circ\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\phi}{1-\operatorname{tg}^2\phi}$, što znači da je i to algebarski broj. Matematičkom indukcijom zaključujemo, da je i broj

$$\operatorname{tg} m\phi = \operatorname{tg}\frac{m}{n}1^\circ \quad (6)$$

algebarski, jer je $\operatorname{tg} m\phi = \operatorname{tg}((m-1)\phi + \phi) = \dfrac{\operatorname{tg}(m-1)\phi + \operatorname{tg}\phi}{1 - \operatorname{tg}(m-1)\phi\cdot\operatorname{tg}\phi}$. Dakle, iz (6) konačno zaključujemo, da su trigonometrijske funkcije racionalnog broja stupnjeva algebarski brojevi. Svakako, tu je uključen i $\operatorname{ctg}\phi$.

Sada ćemo dokazati dvije leme, gdje ćemo uvažili svojstvo trigonometrijskih funkcija, da se sve njihove vrijednosti mogu "svesti" na prvi kvadrant do na predznak.

Lema 1. *Vrijednost trigonometrijske funkcije od bilo kojeg racionalnog broja stupnjeva je algebarski broj.*

Dokaz 1. Promotrimo posebni slučaj, kada je mjera kuta prikazanog sa stupnjevima, minutama i sekundama; npr. $\phi = 19°6'46''$. Jasno je, da se to može pisati u ovom sređenom obliku $\phi = \left(19 + \frac{6}{60} + \frac{46}{3600}\right) \cdot 1° = \frac{68\,806}{3600} \cdot 1°$, pa smo i sada dobili racionalni broj stupnjeva, a prije smo dokazali da za ovaj slučaj vrijedi lema 1, jer je to oblika (6).

Danas se precizna mjerenja i izračuni često rade, tako da su i sekunde u decimalnom prikazu. Općenito je

$$\phi = a°b'c_0 \cdot \underbrace{c_1 \dots c_q''}_{q\ (\mathrm{dec})} = \left(a + \frac{b}{60} + \frac{c_0c_1 \dots c_q}{3600 \cdot 10^q}\right) \cdot 1°, \quad (q \in \mathbf{N} \cup \{0\}); \tag{7}$$

pa i u ovom općenitijem slučaju dobivamo da je mjera kuta prikazana pomoću racionalnog broja stupnjeva, dakle u obliku (6). Prema tome vrijednosti trigonometrijskih funkcija i od ove mjere kuta je algebarski broj. Jasno je, da je sada stupanj jednadžbe

$$p = 45n = 45 \cdot 3600 \cdot 10^q. \tag{8}$$

Na osnovu (8) zaključujemo da vrijedi lema 1. □

Lema 2. *Vrijednosti trigonometrijskih funkcija od bilo kojeg iracionalnog ili transcendentnog broja stupnjeva je transcendentni broj.*

Dokaz 2. Ako bi imali slučaj, da je npr. $\phi = a°b'(\sqrt{2})''$, tada vidimo da je broj stupnjeva iracionalni broj, dakle $\phi = a°b'(1.\underbrace{41421\dots}_{\infty})'' = \left(a + \frac{b}{60} + \frac{141\,421\dots}{3600 \cdot 10^{\infty}}\right) \cdot 1°$, pa ako uvažimo (8) dobivamo da je $p = 45n = 45 \cdot 3600 \cdot 10^{\infty} = \infty$, a to znači da je ta jednadžba transcendentna, pa je i njezino rješenje transcendentni broj. Tu smo uvažili, da $\sqrt{2}$ ima beskonačni decimalni prikaz.

Napravimo poopćenje. Ako uzmemo da je $\phi = a°b'c''$, gdje je barem jedan od brojeva: a, b, c makar iracionalan, a može biti i transcendentan. Promotrit ćemo samo jedan slučaj. Uzmimo, da je $b = b_0.b_1b_2\dots = \frac{b_0b_1b_2\dots}{10^{\infty}}$ iracionalan (ili transcendentan), a $c \in \{0, 1, 2, \dots, 59\}$, tada je $\phi = \left(a + \frac{b_0b_1b_2\dots}{60 \cdot 10^{\infty}} + \frac{c}{3600}\right) \cdot 1°$, pa je $p = \infty$, dakle jednadžba je transcendentna.

Možemo zaključiti, da je općenito $\phi = a°b'c'' = (d_1 \dots d_s, e_1e_2e_3 \dots) \cdot 1° = \frac{d_1 \dots d_se_1e_2e_3 \dots}{10^{\infty}} \cdot 1°$. Dakle ϕ smo izrazili u stupnjevima u obliku decimalnog broja čiji cjelobrojni dio ima s znamenaka, gdje je $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Nadalje on ima beskonačno decimala, jer smo rekli da je makar jedan od brojeva koji prezentiraju: stupnjeve, minute, sekunde; makar iracionalan, pa i sada dolazimo do zaključka da je $p = \infty$. Prema tome, i u ovom općem slučaju je jednadžba transcendentna, i njezino rješenje je transcendentno, jer se radi o iracionalnom (ili transcendentnom) broju stupnjeva, a to znači da vrijedi lema 2. □

Koristeći ove leme, sada ćemo konačno dokazati teorem, koji je iskazan u naslovu članka.

Teorem. *Vrijednosti trigonometrijskih funkcija od racionalnog broja (radijana) je transcendentni broj.*

Dokaz. Budući je $1 \text{ rad} = \dfrac{180}{\pi} \cdot 1^\circ$, a odatle slijedi $\operatorname{tg} \dfrac{m}{n} \text{ rad} = \operatorname{tg} \dfrac{180m}{n\pi} \cdot 1^\circ$ transcendentan broj, jer je $\dfrac{180m}{n\pi}$ transcendentan. Dakle uvažili smo lemu 2. $\square$

Napomena 1. Iz dobivenih rezultata imamo

$$\operatorname{tg} \frac{m}{n}\pi = \operatorname{tg} \frac{180m}{n} \cdot 1^\circ, \tag{9}$$

a to znači, da je ova vrijednost algebarski broj, jer to slijedi iz leme 1.

Napomena 2. Bilo bi zanimljivo ispitati jesu li sve vrijednosti trigonometrijskih funkcija od $\dfrac{m}{n} \cdot 1^\circ$ iracionalne osim $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$.

Napomena 3. Možda je primjereno reći nekoliko napomena o transcendentnim brojevima. Naime, *Leibnitz* je 1682. god. dokazao da funkcija $x \mapsto \sin x$ nije algebarska, a to slijedi i iz našeg teorema. Napomenimo, da je *Charles Hermite* 1873. god. dokazao da je broj e transcendentan, i to je prvi poznati broj te vrste. Transcendentni brojevi su npr.: π, e^π, $2^{\sqrt{2}}$. Godine 1900. *David Hilbert* je naveo probleme iz matematike, koje je trebalo riješiti, a tu je predloženo i ispitivanje transcendentnosti za brojeve e^π i $2^{\sqrt{2}}$, što je kasnije i napravljeno. Danas je još otvoreno pitanje, što je s brojevima: $\pi \pm e$, $\pi \cdot e$, $\dfrac{\pi}{e}$, π^π, e^e, π^e; ali se zna da je barem jedan od brojeva $\pi + e$, $\pi \cdot e$ transcendentan. Recimo i to, da je *Georg Cantor* 1874. god. dokazao, da je skup transcendentnih brojeva gust, a to znači da između bilo koja dva transcendentna broja postoji barem još jedan takav broj.

Literatura

[1] DANILO BLANUŠA, *Viša matematika* (II dio, Drugi svezak), Tehnička knjiga, Zagreb.

[2] SVETOZAR KUREPA, *Matematička analiza* (Funkcije jedne varijable), TK, Zagreb.

[3] PETAR SVIRČEVIĆ, *Vrijednost i netranscendentnost kosinusa od* 1° *na elementaran način*, Matematičko-fizički list, br. 4, Zagreb, 2002/ 2003.