ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 29. veljače 2016. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/264.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadaci iz matematike

3497. Riješi sljedeći sustav jednadžbi:

$$6x^2 - xy - y^2 + x + 2y - 1 = 0$$
$$12x^2 - 2xy - y^2 - 10x + 12y - 11 = 0.$$

3498. Nađi sva realna rješenja jednadžbe
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{z-2}+\sqrt{u}+\sqrt{v} = x+y+z+u+v.$$

3499. Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) takve da je $a+b$ jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$.

3500. Ako su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je
$$x^2 + y^2 + z^2 = 27$$
odredi minimalnu vrijednost izraza
$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

3501. Nađi sve proste brojeve oblika $2^{2^n} + 5$ gdje je n nenegativan cijeli broj.

3502. U skupu kompleksnih brojeva riješi sustav jednadžbi:

$$u^{19}v^{25} = 1$$
$$u^5v^7 = 1$$
$$u^4 + v^4 = 2.$$

3503. Točka P se nalazi unutar trokuta ABC. Točka X je sjecište pravca AP i stranice $\overline{BC}$, a Y je sjecište od BP i $\overline{AC}$. Dokaži da je četverokut $ABXY$ tetivan ako i samo ako se sjecište kružnica ACX i BCY (različito od C) nalazi na pravcu CP.

3504. Dan je konveksan četverokut $ABCD$ kod kojeg su kutovi $\sphericalangle ADC$ i $\sphericalangle BCD$ veći od 90°. Neka je E sjecište pravca AC i pravca kroz B paralelnog s AD i F sjecište pravca BD i pravca kroz A paralelnog s BC. Dokaži da je $EF \| CD$.

3505. Neka su $\overline{BM}$ i $\overline{CN}$ težišnice trokuta ABC. Kroz bilo koju točku D na stranici $\overline{BC}$ povučene su paralele s pravcima BM i CN koje redom sijeku pravce AC i AB u točkama E i F. Dokaži da pravci BM i CN dijele dužinu $\overline{EF}$ na tri jednaka dijela.

3506. U jednakokračnom trokutu ABC je $|AB| = |AC|$ i $\sphericalangle CAB = 20^\circ$. Na kraku $\overline{AC}$ dana je točka D za koju je $\sphericalangle ABD = 10^\circ$. Dokaži da je $|AD| = |BC|$.

3507. Točka O je središte pravilnog šesterokuta $ABCDEF$. Neka su P i Q polovišta dužina $\overline{OB}$ i $\overline{DE}$. Koliki je omjer površine trokuta PQF i površine danog šesterokuta.

3508. Riješi jednadžbu
$$\left\lfloor \frac{25x-2}{4} \right\rfloor = \frac{13x+4}{3},$$
gdje je $\lfloor a \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od a.

3509. Ako je

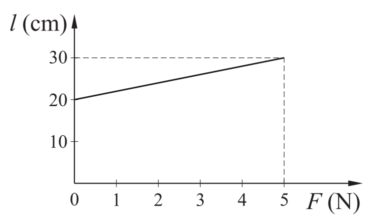
$$\sin x + \sin y = 2a$$
$$\cos x + \cos y = 2b$$
$$\cos(x-y) = -4ab,$$

dokaži $(a+b)^2 = \dfrac{1}{2}$.

3510. Duljina stranice baze pravilne trostrane piramide jednaka je a, a bočnog brida $b \geq \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Koliki je polumjer kugle koja dodiruje sve bridove piramide?

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 398. Graf prikazuje ovisnost duljine opruge o sili koja djeluje na nju. Kolika će biti duljina te opruge kad na nju djeluje sila u suprotnom smjeru iznosa 2.2 N (njutna)?



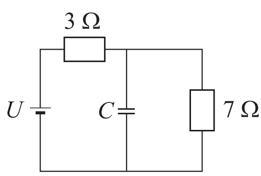
OŠ – 399. Unutarnji otpor baterije je 2 Ω (oma). Kad ona nije spojena na trošilo, napon na njenim krajevima je 4.5 V (volta). Koliki će biti napon na krajevima žaruljice otpora 20 Ω kad ju spojimo na tu bateriju?

OŠ – 400. Pernica ima oblik kvadra koji je dugačak 2 dm (decimetra) i širok 7 cm (centimetra). Njena je masa 100 g (grama). Tlak koji ona vrši na klupu iznosi 200 Pa (paskala). Izračunajte masu pribora u pernici.

OŠ – 401. Učenik ima jednu bakrenu zavojnicu i želi od druge bakrene žice, koju ima, napraviti još jednu istog otpora kao prva. Žica koju ima je dvostruko deblja od one na zavojnici. Ako na zavojnici ima namotano 5 m (metara) žice, koliko metara deblje žice mora uzeti da bi dobio zavojnicu istog otpora kao prva? Električni otpor je proporcionalan s duljinom žice i obrnuto proporcionalan s kvadratom promjera žice.

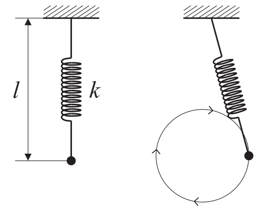
1602. Laserska zraka se lomi i reflektira na površini mirne vode. Ako je kut između lomljene i reflektirane zrake 100°, a indeks loma vode 1.33, odredi upadni kut laserske zrake u odnosu na okomicu površine vode.

1603. Izvor napona u strujnom krugu na slici daje napon 24 V. Koliki je napon na kondenzatoru? Kolika je energija pohranjena u kondenzatoru ako mu kapacitet iznosi 200 nF?



1604. Ioni litija dvaju stabilnih izotopa litija gibaju se u homogenom magnetskom polju iznosa 0.4 T. Ako jednostruko ionizirani lakši izotop $^6\mathrm{Li}^+$ opisuje kružnicu radijusa 30 cm, koliku će kružnicu opisivati teži ion $^7\mathrm{Li}^+$ jednake kinetičke energije? Kolika je ta energija u keV (kiloelektronvoltima) i kolike su njihove brzine?

1605. Uteg mase 350 g obješen je na oprugu konstante elastičnosti k, tako da je od objesišta u ravnotežnom položaju udaljen $l = 45$ cm. Koliki je iznos konstante elastičnosti ako se uteg pri istovremenim malim oscilacijama (gore-dolje) i njihajima (lijevo-desno) može gibati po kružnici kao na slici?



1606. Prvog dana proljeća Sunce se nalazi na nebeskom ekvatoru i tada izlazi točno na istoku, azimutu 90°. Ako se promatrač nalazi na 45° sjeverne zemljopisne širine, u kojem će smjeru Sunce izaći prvog dana ljeta? Tada se Sunce "popne" do 23.5° sjeverne širine.

1607. U periodu od osam godina planet Venera se u pet navrata opaža kao "zvijezda Večernjača" (i pet puta kao "zvijezda Danica"). Koliko orbita oko Sunca napravi Venera, a koliko Zemlja? Koristeći treći Keplerov zakon, odredi radijus Venerine putanje i prosječnu orbitalnu brzinu.

1608. Idealnom crnom tijelu površine $0.12\ \mathrm{m}^2$ snaga zračenja se poveća 12% ako mu temperaturu povisimo za 20 K. Kolika je početna i konačna temperatura? Kojom snagom tijelo zrači prije i poslije povećanja temperature?

C) Rješenja iz matematike

3469. *Nađi sva rješenja sustava jednadžbi*

$$\begin{aligned} y^2+u^2+v^2+w^2&=4x-1\\ x^2+u^2+v^2+w^2&=4y-1\\ x^2+y^2+v^2+w^2&=4u-1\\ x^2+y^2+u^2+w^2&=4v-1\\ x^2+y^2+u^2+v^2&=4w-1\,. \end{aligned}$$

Rješenje. Sumiranjem svih pet jednadžbi i grupiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} &(4x^2-4x+1)+(4y^2-4y+1)\\ &+(4u^2-4u+1)+(4v^2-4v+1)\\ &+(4w^2-4w+1)=0, \end{aligned}$$

tj.

$$(2x-1)^2+(2y-1)^2+(2u-1)^2$$
$$+(2v-1)^2+(2w-1)^2=0.$$

Dakle, jedino rješenje sustava je

$$x=y=u=v=w=\frac{1}{2}.$$

Zlatko Petolas (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3470. *Ako je* $x^2+y^2+z^2=49$, $x+y+z=x^3+y^3+z^3=7$, *koliko je* xyz*?*

Rješenje.

$$(x+y+z)^3$$
$$=x^3+y^3+z^3+\frac{3!}{2!1!0!}(x^2y+x^2z+xy^2$$
$$+y^2z+xz^2+yz^2)+\frac{3!}{1!1!1!}xyz$$
$$=x^3+y^3+z^3$$
$$+3\Big[(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)-(x^3+y^3+z^3)\Big]$$
$$+6xyz$$
$$=3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$$
$$-2(x^3+y^3+z^3)+6xyz.$$

Dakle,

$$7^3=3\cdot 49\cdot 7-2\cdot 7+6xyz$$

odakle dobivamo $xyz=-112$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3471. *Dokaži da za svaki prirodan broj* n *vrijedi nejednakost*

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4n+1}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

Rješenje. Označimo

$$P=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4n+1}.$$

Uočimo: za sve $k>1$ vrijedi

$$\frac{2k-1}{2k+1}<\frac{2k+1}{2k+3}, \qquad (*)$$

jer je to ekvivalentno

$$4k^2+4k-3<4k^2+4k+1.$$

Primjenom $(*)$ na ocjenu našeg produkta P: $P<\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{13}{15}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4n+3}$.

Sada je

$$P^2=P\cdot P$$
$$<\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{11}\right)\cdot\left(\frac{11}{13}\cdot\frac{13}{15}\right)\cdot$$
$$\ldots\cdot\left(\frac{4n-1}{4n+1}\cdot\frac{4n+1}{4n+3}\right)=\frac{3}{4n+3}.$$

Dakle, $P<\sqrt{\dfrac{3}{4n+3}}$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3472. *Duljine bridova kvadra su* a, b, c, *dok je* d *duljina njegove prostorne dijagonale. Dokaži da vrijedi*

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq\sqrt{3}abcd\,.$$

Kada se postiže jednakost?

Rješenje.

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq\sqrt{3}abcd$$
$$\iff\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2\geq 3a^2b^2c^2d^2$$
$$\iff a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4+2a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$$
$$\geq 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$$
$$\iff a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4$$
$$-a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\geq 0$$
$$\iff 2a^4b^4+2b^4c^4+2c^4a^4$$
$$-2a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\geq 0$$
$$\iff\left(a^2b^2-b^2c^2\right)^2+\left(a^2b^2-c^2a^2\right)^2$$
$$+\left(b^2c^2-c^2a^2\right)^2\geq 0.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3473. *Odredi sumu*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}.$$

Rješenje. Označimo

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}.$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika sume s 3^{2k} dobivamo:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{2}{3})^k}{\left(1-(\frac{2}{3})^k\right)\left(3-2(\frac{2}{3})^k\right)}.$$

Zbog

$$\frac{x}{(1-x)(3-2x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{3-2x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\frac{2}{3}x}$$

imamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1-(\frac{2}{3})^k} - \frac{1}{1-(\frac{2}{3})^{k+1}} \right) = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}.$$

Sada je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}\right) = 3 - 1 = 2.$$

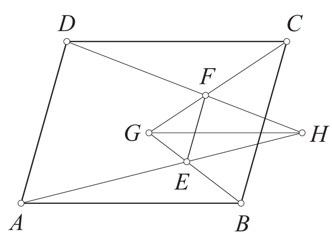
Zlatko Petolas (3), Zagreb

3474. *Unutar paralelograma $ABCD$ dana je dužina $\overline{EF}$ takva da je $EF \| BC$. Pravci BE i CF sijeku se u točki G, dok se AE i DF sijeku u H. Dokaži da je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle GHE$.*

Prvo rješenje. Tvrdnja zadatka slijedi ako pokažemo da je $GH \parallel AB$. Imamo:

$$\triangle FEH \sim \triangle DAH \implies \frac{|FH|}{|DH|} = \frac{|EF|}{|DA|} \implies \overrightarrow{FH} = k \cdot \overrightarrow{DH},$$

gdje je $k = \dfrac{|EF|}{|DA|}$, $0 < k < 1$.



Slično,

$$\triangle EFG \sim \triangle BCG \implies \frac{|GF|}{|GC|} = \frac{|EF|}{|BC|} \implies \overrightarrow{GF} = k \cdot \overrightarrow{GC}.$$

Sada,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GH} &= \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FH} = k\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{DH}\\ &= k(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FC}) + k(\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FH})\\ &= k(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FH}) + k(\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FC})\\ &= k\overrightarrow{GH} + k\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

$$\implies \overrightarrow{GH} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{DC} \implies GH \parallel DC \parallel AB.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Imamo

$$\frac{|AH|}{|EH|} = \frac{|AD|}{|EF|} \quad \text{i} \quad \frac{|BG|}{|EG|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

jer je $\triangle AHD \sim \triangle EHF$ i $\triangle BGC \sim \triangle EGF$.

U paralelogramu $ABCD$ je $|AD| = |BC|$. Dakle,

$$\frac{|AH|}{|EH|} = \frac{|BG|}{|EG|}.$$

Odavde je

$$\frac{|AH|-|EH|}{|EH|} = \frac{|BG|-|EG|}{|EG|}, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{|EA|}{|EH|} = \frac{|EB|}{|EG|}.$$

Kako je $\sphericalangle AEB = \sphericalangle HEG$ imamo $\triangle AEB \sim \triangle HEG$. Stoga je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle GHE$.

Sara Džebo (4),
Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

3475. *Neka je ABC bilo koji trokut. S njegove vanjske strane konstruirani su jednakokračni trokuti ARB, BPC, CQA kojima su svi kutovi uz stranice trokuta jednaki $30°$. Dokaži da je trokut PQR jednakostraničan.*

Prvo rješenje. Nad svakom stranicom trokuta ABC konstruirajmo jednakostranične trokute ABF, CBD, ACE. Točke R, P, Q su težišta tih trokuta (i središta im opisanih kružnica).

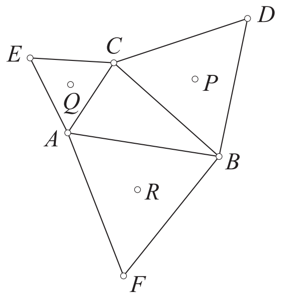
U kompleksnoj ravnini neka z_A, z_B, z_C odgovaraju vrhovima trokuta ABC. Vrhovima

D, E, F odgovaraju kompleksni brojevi

$$z_D = (z_B - z_C)e^{i\frac{\pi}{3}} + z_C$$
$$z_E = (z_C - z_A)e^{i\frac{\pi}{3}} + z_A$$
$$z_F = (z_A - z_B)e^{i\frac{\pi}{3}} + z_B.$$

Točkama P, Q, R odgovaraju

$$z_P = \frac{((z_B - z_C)e^{i\frac{\pi}{3}} + z_C) + z_B + z_C}{3}$$
$$z_Q = \frac{((z_C - z_A)e^{i\frac{\pi}{3}} + z_A) + z_A + z_C}{3}$$
$$z_R = \frac{((z_A - z_B)e^{i\frac{\pi}{3}} + z_B) + z_A + z_B}{3}.$$



Sada imamo:

$$\begin{aligned}
&|z_P - z_Q| \\
&= \frac{1}{3}|(z_B - z_C)e^{i\frac{\pi}{3}} - (z_C - z_A)e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&\quad + (z_C - z_A) + (z_B - z_A)| \\
&= \frac{1}{3}|(z_B - z_C)e^{i\frac{\pi}{3}} + (z_C - z_A)e^{i\frac{5\pi}{3}} + (z_B - z_A)|,
\end{aligned}$$

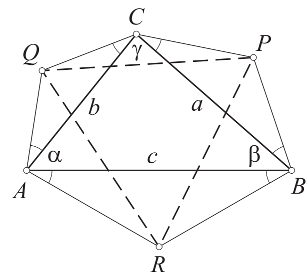
$$\begin{aligned}
&|z_Q - z_R| \\
&= \frac{1}{3}|(z_C - z_A)e^{i\frac{\pi}{3}} - (z_A - z_B)e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&\quad + (z_C - z_B) + (z_A - z_B)| \\
&= \frac{1}{3}|(z_C - z_A)e^{i\frac{\pi}{3}} + (z_A - z_B)e^{i\frac{5\pi}{3}} + (z_C - z_B)| \\
&= \frac{1}{3}|e^{i\frac{4\pi}{3}}||(z_C - z_A)e^{i\frac{\pi}{3}} + (z_A - z_B)e^{i\frac{5\pi}{3}} + (z_C - z_B)| \\
&= \frac{1}{3}|(z_C - z_A)e^{i\frac{5\pi}{3}} + (z_A - z_B)e^{3i\pi} + (z_C - z_B)e^{i\frac{4\pi}{3}}| \\
&= \frac{1}{3}|(z_C - z_A)e^{i\frac{5\pi}{3}} + (z_B - z_A) + (z_B - z_C)e^{i\frac{\pi}{3}}|.
\end{aligned}$$

Dakle, $|z_P - z_Q| = |z_Q - z_R|$. Posve analogno se pokaže $|z_P - z_R| = |z_Q - z_R|$. Dakle, P, Q, R su vrhovi jednakostraničnog trokuta.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Trokuti CQA, BPC, ARB su jednakokračni sa zajedničkim kutovima od 30°. Tada je

$$|AQ| = |QC| = \frac{b}{\sqrt{3}}$$
$$|CP| = |PB| = \frac{a}{\sqrt{3}}$$
$$|BR| = |RA| = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$



Primjenom kosinusovog poučka na $\triangle QCP$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&|QP|^2 \\
&= |CP|^2 + |QC|^2 - 2|CP| \cdot |QC| \cdot \cos \angle PCQ \\
&= \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cos(\gamma + 60^\circ) \\
&= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab(\cos\gamma\cos 60^\circ - \sin\gamma\sin 60^\circ)) \\
&= \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\left(\frac{\cos\gamma}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin\gamma}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - \frac{2ab\cos\gamma}{2} + \frac{2ab\sqrt{3}\sin\gamma}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + 2\sqrt{3}P_{ABC}\right) \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + 2\sqrt{3}P_{ABC},
\end{aligned}$$

gdje je P_{ABC} površina trokuta ABC.

Ovaj izraz je simetričan po a, b, c. Isti izraz bismo dobili i za $|PR|$ i $|RQ|$. Dakle, $\triangle PQR$ je jednakostraničan.

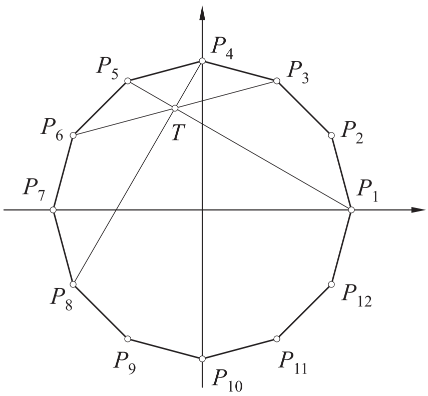
Sara Džebo (4), Sarajevo, BiH

3476. *Neka je $P_1P_2 \ldots P_{12}$ pravilni dvanaesterokut. Dokaži da se pravci P_1P_5, P_4P_8 i P_3P_6 sijeku u istoj točki.*

Prvo rješenje. Neka se vrhovi P_1, P_2, ..., P_{12}, bez smanjenja općenitosti, nalaze na jediničnoj kružnici sa središtem u ishodištu tako da su im koordinate:

$$P_k = \left(\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{(k-1)\pi}{6}\right)\right),$$

$k = 1, \ldots, 12$.



Jednadžba pravca P_1P_5 je

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

a pravca P_4P_8

$$y = \sqrt{3}x + 1.$$

Ta dva pravca se sijeku u točki

$$T\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right).$$

Polovište dužine $\overline{P_3P_6}$ je

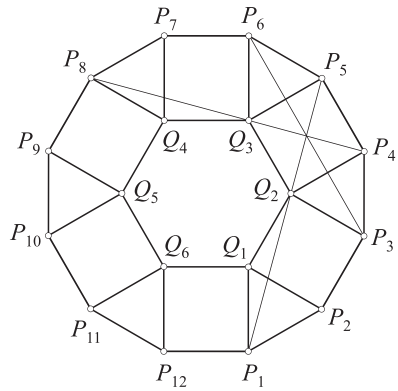
$$\left(\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2}, \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right).$$

Dakle, pravci P_1P_5, P_4P_8 i P_3P_6 se sijeku u polovištu dužine $\overline{P_3P_6}$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Pravilni dvanaesterokut se može rastaviti na šest jednakostraničnih trokuta $P_1P_2Q_1$, $P_3P_4Q_2$, $P_5P_6Q_3$, $P_7P_8Q_4$, $P_9P_{10}Q_5$, $P_{11}P_{12}Q_6$; šest kvadrata $P_2P_3Q_2Q_1$, $P_4P_5Q_3Q_2$, $P_6P_7Q_4Q_3$, $P_8P_9Q_5Q_4$, $P_{10}P_{11}Q_6Q_5$, $P_{12}P_1Q_1Q_6$ i pravilni šesterokut $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$.



Iz jednakokračnog trokuta $Q_1P_1Q_2$ je $\sphericalangle P_1Q_1Q_2 = 150°$ i $\sphericalangle Q_1Q_2P_1 = 15°$. Kako je

$$\sphericalangle Q_1Q_2P_1 + \sphericalangle Q_1Q_2Q_3 + \sphericalangle Q_3Q_2P_5$$
$$= 15° + 120° + 45° = 180°,$$

točke P_1, Q_2, P_5 su kolinearne. Slično su P_4, Q_3, P_8 kolinearne točke. Preostaje dokazati da pravac P_3P_6 prolazi središtem kvadrata $P_4P_5Q_3Q_2$. Ovo slijedi iz činjenice da je šesterokut $P_3P_4P_5P_6Q_3Q_2$ simetričan u odnosu na središte tog kvadrata.

Ur.

3477. *Dane su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Točke F i G su plovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Točke H i K su polovišta dijagonala $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ Dokaži da vrijedi*

$$|AB|^2 + |CD|^2 = 2(|FG|^2 + |HK|^2).$$

Prvo rješenje. Neka vrhovima A, B, C, D u kompleksnoj ravnini odgovaraju z_A, z_B, z_C, z_D. Tada je

$$z_F = \frac{z_A + z_C}{2}, \quad z_G = \frac{z_B + z_D}{2},$$
$$z_H = \frac{z_A + z_D}{2}, \quad z_K = \frac{z_B + z_C}{2}.$$

Označimo $u = z_A - z_B$, $v = z_C - z_D$. Tada je

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$

S druge strane,

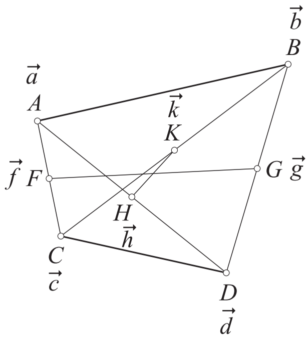
$$2(|FG|^2 + |HK|^2)$$
$$= 2\left(\frac{|u+v|^2}{4} + \frac{|u-v|^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((u+v)(\overline{u+v}) + (u-v)(\overline{u-v})\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left((u+v)(\overline{u}+\overline{v}) + (u-v)(\overline{u}-\overline{v})\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(|u|^2+u\overline{v}+\overline{u}v+|v|^2+|u|^2-u\overline{v}-\overline{u}v+|v|^2\right)$$
$$= |u|^2 + |v|^2.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Prema oznakama na slici imamo:

$$|AB|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}$$
$$|CD|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2 = |\vec{d}-\vec{c}|^2 = \vec{c}^2 + \vec{d}^2 - 2\vec{c}\vec{d}$$



$$|FG|^2 = |\overrightarrow{FG}|^2 = |\vec{g}-\vec{f}|^2$$
$$= \left|\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right|^2$$
$$= \frac{1}{4}|(-\vec{a}+\vec{b}) - (\vec{c}-\vec{d})|^2$$
$$|HK|^2 = |\overrightarrow{HK}|^2 = |\vec{k}-\vec{h}|^2$$
$$= \left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}\right|^2$$
$$= \frac{1}{4}|(-\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{c}-\vec{d})|^2$$
$$\Longrightarrow 2(|FG|^2 + |HK|^2)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{c}\vec{d}$$
$$\Longrightarrow |AB|^2 + |CD|^2 = 2(|FG|^2 + |HK|^2).$$

Ur.

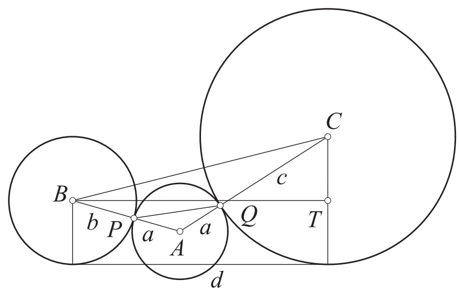
3478. *Dane su tri kružnice sa središtima A, B i C, polumjera a, b i c. Prva kružnica dodiruje druge dvije izvana u točkama P i Q. Ove dvije nemaju zajedničkih točaka. Dokaži da vrijedi*

$$|PQ|^2 = \frac{a^2d^2}{(a+b)(a+c)},$$

gdje je d duljina zajedničke vanjske tangente kružnica sa središtima B i C.

Rješenje. Primijenimo dva puta kosinusov poučak na trokute AQP i ACB:

$$\frac{a^2 + a^2 - |PQ|^2}{2a^2} = \cos\sphericalangle BAC$$
$$= \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 - |BC|^2}{2(a+b)(a+c)}. \qquad (*)$$



Za pravokutni trokut BTC vrijedi: $|BC|^2 = d^2 + (c-b)^2$, pa uvrštavanjem toga u $(*)$, sređivanjem izraza, slijedi tvrdnja zadatka.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3479. *Ako su a, $b \neq c$ duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi, dokaži jednakost*

$$\frac{b-c}{b+c}\cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{b+c}{b-c}\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin(\beta-\gamma)}.$$

Rješenje. Iz poučka o sinusima imamo ekvivalentne jednakosti:

$$\frac{2R(\sin\beta - \sin\gamma)}{2R(\sin\beta + \sin\gamma)}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{2R(\sin\beta + \sin\gamma)}{2R(\sin\beta - \sin\gamma)}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin(\beta-\gamma)}$$

$$\frac{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin(\beta-\gamma)}$$

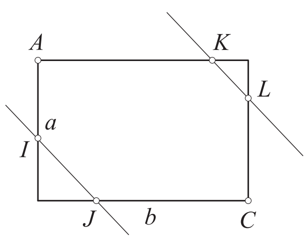
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sin(\beta-\gamma)}$$
$$\frac{\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2})}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{2}{\sin(\beta-\gamma)}$$
$$\frac{2}{\sin(\beta-\gamma)}=\frac{2}{\sin(\beta-\gamma)}.$$
Kako je ova jednakost istinita, vrijedi i polazna.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3480. *Dokaži da za svaki prirodan broj $n>3$ postoji konveksan poligon s n stranica, od kojih nisu sve iste duljine, tako da je suma udaljenosti svake unutarnje točke do njegovih stranica konstantna.*

Rješenje. Za $n=4$, uzmimo pravokutnik stranica a, b; $a<b$. Suma udaljenosti svake unutarnje točke do njegovih stranica iznosi $a+b$.

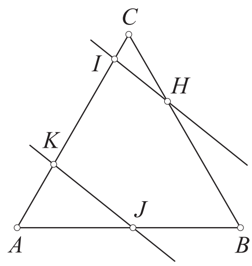
Za $n=6$ prethodni pravokutnik presjecimo kao na slici s dva paralelna pravca međusobno udaljena za c, tako da šesterokut $AIJCLK$ nema sve strane jednake duljine. Tada je suma udaljenosti svake unutarnje točke tog šesterokuta do stranica ostatka pravokutnika opet $a+b$, a do stranica $\overline{IJ}$, $\overline{LK}$ iznosi c, pa je suma udaljenosti svake unutarnje točke šeterokuta do njegovih stranica $a+b+c$.



Sada se lako indukcijom dokaže, s ovom tehnikom presijecanja, da se za svaki n koji je paran može konstruirati konveksni n-terokut koji ima traženo svojstvo.

Slučaj $n=5$. Uočimo najprije da jednakostranični trokut stranice a ima svojstvo da je suma udaljenosti svake unutarnje točke do njegovih stranica konstantna i iznosi $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Presijecimo sada taj trokut s dva paralelna pravca međusobne udaljenosti c tako da dobiveni peterokut $BHIKJ$ nema sve stranice jednake. Udaljenost svake unutarnje točke tog peterokuta do njegovih stranica sada iznosi $\frac{a}{2}\sqrt{3}+c$.

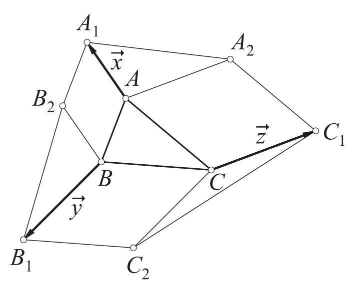


Dalje se sada induktivno konstruira ovom tehnikom, za n neparan, konveksni n-terokut koji ima traženo svojstvo.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3481. *Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su rombovi ABB_2A_1, BCC_2B_1, CAA_2C_1. Da li su dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ stranice nekog trokuta?*

Rješenje. Definirajmo vektore $\vec{x}=\overrightarrow{AA_1}$, $\vec{y}=\overrightarrow{BB_1}$, $\vec{z}=\overrightarrow{CC_1}$. Sada je
$$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{z}-\vec{x}$$
$$\overrightarrow{B_1B_2}=\vec{x}-\vec{y}$$
$$\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{y}-\vec{z}.$$



Dakle,
$$\overrightarrow{A_2A_1}=\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}.$$
Iz ove jednakosti zaključujemo da $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ mogu biti stranice trokuta, osim u slučaju

da se radi o kolinearnim vektorima (u ovaj slučaj upada i situacija kada je $A_1 = A_2$ ili $B_1 = B_2$ ili $C_1 = C_2$).

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3482. *Dani su brojevi* a, b, c *takvi da je*

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

Dokaži da su dva od ova tri razlomka jednaka 1, *a treći* -1.

Prvo rješenje.

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$$

$$\iff \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1=0$$

$$\iff \frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+\frac{(c+a)^2-b^2}{2ca}+\frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}=0$$

$$\iff \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}+\frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}+\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}=0$$

$$\iff (b-c-a)\left(\frac{b-c+a}{2bc}-\frac{c+a+b}{2ca}-\frac{a-b-c}{2ab}\right)=0$$

$$\iff (b-c-a)\frac{(a-c)^2-b^2}{abc}=0$$

$$\iff \frac{(b-c-a)(a-c-b)(a-c+b)}{abc}=0.$$

Iz ovoga sada slijede slučajevi:

1° Ako je $b-c-a=0 \implies b=c+a \implies$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1,\quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=-1,\quad \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

2° Ako je $a-c-b=0 \implies a=c+b \implies$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-1,\quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=1,\quad \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

3° Ako je $a-c+b=0 \implies a=c-b \implies$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1,\quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=1,\quad \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-1.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Množenjem dane jednakosti s $2abc$, redom dobivamo:

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=2abc$$

$$ab^2+ac^2-a^3+bc^2+a^2b-b^3+a^2c+b^2c-c^3-2abc=0$$

$$b^2c+ab^2-b^3-c(a-c)^2-a(a-c)^2+b(a-c)^2=0$$

$$b^2(c+a-b)-(a-c)^2(c+a-b)=0$$

$$(c+a-b)[b^2-(a-c)^2]=0$$

$$(c+a-b)(b-a+c)(b-a-c)=0.$$

Neka je $a+c=b$. Tada imamo

$$\frac{(a+c)^2+c^2-a^2}{2(a+c)c}=\frac{2c(a+c)}{2c(a+c)}=1,$$

$$\frac{c^2+a^2-(a+c)^2}{2ca}=-1,$$

$$\frac{a^2+a^2+2ac+c^2-c^2}{2a(a+c)}=1.$$

Slično se pokaže da vrijede i slučajevi $b+c=a$, $a+b=c$.

Sara Džebo (4), Sarajevo, BiH

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 390. *Luka trči brzinom* $7\ m/s$, *a Sara brzinom* $5\ m/s$. *Počeli su pravocrtno trčati s istog mjesta, ali je Sara počela trčati jednu minutu prije Luke. Koliko će biti udaljeni od početne točke kad Luka dostigne Saru?*

Rješenje.

$v_L = 7$ m/s

$v_S = 5$ m/s

$\underline{t_S = t_L + 1 \text{ min}}$

$s = ?$

Za jednu minutu Luka i Sara će biti udaljeni:

$$\Delta s = v_S \cdot t = 5 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 300 \text{ m}.$$

Brzina dostizanja jednaka je razlici brzina:

$$v = v_L - v_S = 7 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}.$$

Vrijeme za koje će Luka dostići Saru bit će:

$$t_L = \frac{\Delta s}{v} = \frac{300 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} = 150 \text{ s}.$$

Sada je

$$s = v_L \cdot t = 7 \text{ m/s} \cdot 150 \text{ s} = 1050 \text{ m}.$$

Ur.

OŠ – 391. *Ako se na oprugu objesi uteg od 400 grama ona se produži 10 centimetara. Koliko će biti produženje svake opruge ako dvije takve jednake opteretimo utegom mase 1 kilogram kad su one obješene:*

a) jedna na drugu

b) jedna pored druge?

Rješenje.

$m = 400$ g

$\Delta l = 10$ cm

$\underline{m_1 = 1 \text{ kg}}$

$\Delta l = ?$

$F = mg = 0.4 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 4 \text{ N}.$

Težina utega je $F_1 = 10$ N.

Koeficijent opruge je

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{4 \text{ N}}{0.1 \text{ m}} = 40 \text{ N/m}.$$

a) U prvom slučaju imamo

$$\Delta l = \frac{F}{k} = \frac{10 \text{ N}}{40 \text{ N/m}} = 0.25 \text{ m},$$

b) a u drugom

$$\Delta l = \frac{F}{2k} = \frac{10 \text{ N}}{80 \text{ N/m}} = 0.125 \text{ m}.$$

Martina Čuljak (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 392. *Na udaljenosti 50 cm od sabirne leće nalazi se predmet čija se oštra slika može uhvatiti na zastoru koji je od nje udaljen 2 m. Ako tu leću zamijenimo lećom dvostruko manje žarišne daljine, a predmet ostavimo na istom mjestu, na koju će se udaljenost od leće morati postaviti zaslon da bi slika opet bila oštra? Za leće vrijedi da je zbroj recipročne vrijednosti udaljenosti predmeta od leće i recipročne vrijednosti udaljenosti slike od leće jednak recipročnoj vrijednosti žarišne daljine.*

Rješenje.

$a = 50 \text{ cm} = 0.5$ m

$b_1 = 2$ m

$\underline{f_1 = 2f_2}$

$b_2 = ?$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{0.5 \text{ m}} + \frac{1}{2 \text{ m}} = 2.5 \text{ m}^{-1}$$

$f_1 = 0.4$ m

$f_2 = 0.2$ m

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{a} = \frac{1}{0.2 \text{ m}} - \frac{1}{0.5 \text{ m}} = 3 \text{ m}^{-1}$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \text{ m}.$$

Ur.

OŠ – 393. *Kepler-186f je jedan od nedavno otkrivenih planeta u svemiru za koje se pretpostavlja da bi mogli imati uvjete za razvoj života. Znanstvenici znaju da mu je promjer oko 1.11 puta veći od Zemljinog. Odredi masu koju bi taj planet morao imati da mu ubrzanje sile teže bude jednako kao na Zemlji. Kolika bi mu bila gustoća? Ubrzanje sile teže je proporcionalno s masom i obrnuto proporcionalno s radijusom planeta. Masa Zemlje je* $5.97 \cdot 10^{24}$ kg*, a njen je polumjer 6371 km.*

Rješenje.

$r = 1.11 r_Z$

$m_Z = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg

$\underline{r_Z = 6371 \text{ km}}$

$m = ?$

$\rho = ?$

$g = g_Z$

$$\frac{m}{r^2} = \frac{m_Z}{r_Z^2}$$

$$m = \frac{m_Z(1.11r_Z)^2}{r_Z^2} m = 1.11^2 m_Z$$
$$= 7.356 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$
$$r = 1.11 \cdot 6371 \text{ km}$$
$$= 7071.8 \text{ km} = 7.0718 \cdot 10^6 \text{ m}$$
$$V = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3}(7.0718 \cdot 10^6 \text{ m})^3 \pi$$
$$= 1.485 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$$
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{7.356 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{1.926 \cdot 10^{21} \text{ m}^3}$$
$$= 4954 \text{ kg/m}^3.$$

Tina Burnić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1588. *Orbita za odlaganje geostacionarnih satelita ("junk orbit") ima 500 km veći radijus kruženja od geostacionarne. Izračunaj ophodno vrijeme satelita u toj orbiti, te vrijeme potrebno satelitu da zaostane jedan puni krug za rotacijom Zemlje. Za Zemlju uzeti $T = 24$ h, $GM = 4 \cdot 10^{14}$ m^3/s^2.*

Rješenje. Treći Keplerov zakon, izražen iz uvjeta kruženja satelita određuje kub radijusa kruženja
$$r^3 = T^2 \cdot \frac{GM}{4\pi^2}.$$
Uz $T = 86\,400$ s i $GM = 4 \cdot 10^{14}$ m^3/s^2, dobijemo $r = 42\,290\,500$ m. Znači da orbita za odlaganje ima radijus $r' = 42\,790\,500$ m, te iz prve jednadžbe ponovo $T' = 87\,936.78$ s, tj. 25.613 minuta više od geostacionarnog perioda. Da bi satelit zaostao puni krug, treba napraviti $x - 1$ perioda u x dana, tj.
$$(x-1)T' = xT$$
$$1 - \frac{1}{x} = \frac{T}{T'} = 0.982524.$$
Odatle je $x = 57.22$ dana.

Ur.

1589. *Uteg mase 450 g obješen je na oprugu. Period titranja utega poveća se 0.11 s ako na uteg učvrstimo dodatnu masu 50 g. Odredi konstantu elastičnosti opruge i period titranja za oba slučaja.*

Rješenje. Odnos perioda titranja T, mase utega m i konstante elastičnosti k određen je jednadžbom perioda titranja
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$
Povećanje mase i perioda izrazimo kao:
$$T + 0.11 = 2\pi\sqrt{\frac{m + 0.05}{k}}.$$
Dijeljenjem dviju jednadžbi dobijemo uvjet na T:
$$1 + \frac{0.11}{T} = \sqrt{\frac{m+0.05}{m}} = \sqrt{\frac{0.5}{0.45}} = 1.0541.$$
Odatle je $T = 2.03355$ s. Uvršteno u prvu jednadžbu daje $k = 4.296$ N/m. Drugi period titranja je, naravno, $T' = T + 0.11 = 2.14355$ s.

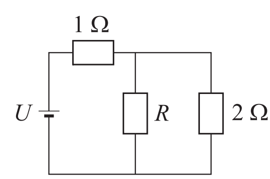
Ur.

1590. *Kratkovidna osoba bez pomoći naočala može vidjeti oštru sliku objekata između 16 i 40 cm udaljenosti od oka. Odredi jačinu leća naočala koju osoba treba. Do koje najmanje udaljenosti ta osoba vidi oštru sliku s naočalama?*

Rješenje. Zadani raspon jasnog vida od 16 do 40 cm odgovara dodatnim jačinama leće u oku (u odnosu na oštar vid beskonačno udaljenih predmeta) određenima izrazom $J = 1/f$. Za $f_1 = 40$ cm, jačina je $J_1 = 2.5$ dpt, a za $f_2 = 16$ cm jačina iznosi $J_2 = 6.25$ dpt. Kako naočalama želimo postići da osoba dobro vidi daleke predmete $(J = 0)$, naočale trebaju biti jakosti $-J_1$, to jest -2.5 dpt. Akomodacija oka iznosi razliku dviju jačina, to jest $\Delta J = 6.25 - 2.5 = 3.75$ dpt. Odgovarajuća najmanja daljina do koje osoba jasno vidi s naočalama je
$$f' = \frac{1}{\Delta J} = 0.2667 \text{ m} = 26.67 \text{ cm}.$$

Ur.

1591. *Odredi otpor R takav da u strujnom krugu na slici Jouleova snaga u preostala dva otpornika bude jednaka.*



Rješenje. Jouleova toplina bit će

$$P_1 = U_1 I_1 = 1\Omega \cdot I_1^2$$

$$P_2 = U_2 I_2 = 2\Omega \cdot I_2^2.$$

Struja I_1 grana se na I_2 i I_R, pa uz Ohmov zakon imamo:

$$I_1 = I_2 + I_R = I_2 + \frac{U_2}{R} = I_2 + \frac{2I_2}{R}.$$

$P_1 = P_2$ daje uvjet $I_1^2 = 2I_2^2$, što uspoređeno s gornjom jednadžbom određuje R:

$$1 + \frac{2}{R} = \sqrt{2},$$

pa je $R = 4.8284\ \Omega$.

Ur.

1592. *Odredi energiju koju bi oslobodila nuklearna reakcija jednog grama* ^{7}*litij-hidrida (LiH). Reakcija* $^1H + {}^7Li \rightarrow 2 \cdot {}^4He + Q$ *oslobađa* $Q = 17\,347$ *keV energije.*

Rješenje. U jednom gramu imamo $1/8$ grama vodika i $7/8$ grama litija 7. Broj obiju vrsta čestica je jednak i iznosi $N_A/8$, gdje je N_A Avogadrov broj. Kako jedan par čestica proizvede $1.7347 \cdot 10^7$ eV energije, cijeli gram proizvede $Q \cdot N_A/8 = 1.3058 \cdot 10^{30}$ eV. Da bismo dobili energiju u Jouleima, trebamo dobiveno pomnožiti s iznosom elementarnog naboja, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Konačno dobivamo

$$E = 2.09 \cdot 10^{11}\ \mathrm{J}.$$

Ur.

1593. *Neka je prosječna gustoća asteroida* $2050\ kg/m^3$*, koji je kugla polumjera 475 km (Ceres). Odredi ubrzanje sile teže na površini i brzinu oslobađanja (potrebnu za uzlet s površine na vrlo veliku udaljenost).*

Rješenje. Za homogenu kuglu, ubrzanje sile teže na površini iznosi

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Uz

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$

$$M = \rho \cdot 4/3R^3\pi \quad \text{i} \quad R = 475\,000\ \mathrm{m}$$

dobivamo:

$$M = 9.203 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}$$

$$g = 0.272\ \mathrm{m/s^2},$$

dok je brzina oslobađanja ona za koju je kinetička energija jednaka gravitacijskoj potencijalnoj na površini, tj.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 508.4\ \mathrm{m/s}.$$

Ur.

1594. *Pri temperaturi 273 K, brzina zvuka u zraku iznosi* $331\ m/s$*, a u heliju* $972.5\ m/s$*. Koliko treba povećati temperaturu da brzina zvuka u heliju bude* $700\ m/s$ *veća nego u zraku iste temperature?*

Rješenje. Brzina zvuka proporcionalna je korijenu apsolutne temperature, točnije

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

gdje je γ koeficijent adijabatske ekspanzije, R opća plinska konstanta i M molarna masa čestice plina. Ako traženu temperaturu označimo s T, a zadanu s $T_0 = 273$ K, vrijedi

$$v = v_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}},$$

za zrak i za helij. Tada je razlika brzina

$$\Delta v = \Delta v_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Uvrštavanjem $\Delta v = 700$ m/s, $\Delta v_0 = 972.5 - 331 = 641.5$ m/s i $T_0 = 273$ K, dobijemo $T = 325$ K. Nije teško provjeriti da je tada brzina u zraku 361.1 m/s, a u heliju 1061.1 m/s, što doista daje razliku od 700 m/s.

Ur.