56. Međunarodna matematička olimpijada 2015. g.

Na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi koja se održavala od 4. do 16. srpnja 2015. g. hrvatska ekipa je ostvarila najbolji rezultat u svojoj povijesti. Šesteročlanu ekipu koju su vodili *Matija Bašić* i *Ktistina Ana Škreb*, osvojila je 15. mjesto u konkurenciji od 104 države. Ukupno je sudjelovalo 577 učenika.

Ekipa je izabrana na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi, održanoj u okviru priprema za natjecanje na Fakultetu elektrotehnike i računarstva, a koje su trajale od 3. do 22. lipnja i od 2. do 6. srpnja. Tu je najuspješniji bio Ivan Lazarić, a plasirali su se još *Petar Orlić, Danijel Paleka, Adrian Beker, Kristijan Štefanec* i *Lukas Novak*.

Grad domaćin Olimpijade bio je Chiang Mai na samom sjeveru Tajlanda. U gradu je obično tokom ljeta vruće i jako sparno, ali sam centar grada ugodno iznenađuje živopisnim ulicama, trgovinama i lokalima. Hotel u kojem se održavalo natjecanje omogućavao je niz drugih aktivnosti – bazen na sedmom katu i ogromne spojene sobe su bile ugodno iznenađenje u odnosu na studentski dom prošle godine u Cape Townu.

Svečana ceremonija otvaranja prošla je u mnogo ozbiljnijem tonu nego prošle godine, posebno zbog činjenice da je Olimpijadu otvorila tajlandska princeza *Maha Chakri Sirindhom*. Hrvatska maskota Mathe Mišo ponosno je mahao zastavicom i slikao se s njemačkim Mathematigerom. Dane prije natjecanja kratili smo igrajući stolni tenis u društvenoj prostoriji i upoznavajući se s drugim natjecateljima.

Samo natjecanje se održavalo u izvrsno klimatiziranoj prostoriji s velikim stolovima i općenito odličnom organizacijom. Prvi dan je donio kombinatoriku u prvom zadatku, teoriju brojeva u drugom i geometriju u trećem. Skoro svi članovi naše ekipe riješili su prvi zadatak, koji se pokazao nešto težim nego inače. Drugi zadatak bio je pravi fijasko, barem nam je to tako izgledalo. Riješio ga je samo Adrian, a Kristijan je na njemu osvojio više od pola bodova. Na trećem su četiri člana ekipe uočila jednu činjenicu, a ispostavilo se da je to bilo dovoljno za po jedan bod. Drugi dan je prošao nešto bolje. Četvrti zadatak je, naravno, bio geometrija. Svi smo ga ili potpuno riješili ili dobili većinu bodova. Peti je bio algebra (funkcijska jednadžba), a zadnji kombinatorika. Petar i Adrian su potpuno riješili funkcijsku jednadžbu, a na šestom, koji je obično najteži zadatak, nismo dobili ni boda.

Nakon rješavanja zadataka Matija i Kristina su vrlo pažljivo proučili naša rješenja i krenuli kod koordinatora u borbu za bodove. Mi smo imali dva dana opuštanja. Vrijeme do preliminarnih rezultata smo proveli na izletima, među kojima su bili kamp slonova i budistički hramovi družeći se s natjecateljima iz svih krajeva svijeta. Saznali smo da Adrian ima 29 bodova, pa smo napeto iščekivali granice za medalje, nadajući se da ćemo nastaviti niz zlatnih medalja. Nakon službene objave rezultata naša ekipa je zauzela 15. mjesto, što je najbolji plasman do sada.

Rezultati hrvatske ekipe su abecedno sljedeći:

Adrian Beker, XV. gimnazija, Zagreb, 2. r., zlatna medalja
Ivan Lazarić, Gimnazija Pula, Pula, 4. r., brončana medalja
Lukas Novak, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, 2. r.
Petar Orlić, XV. gimnazija, Zagreb, 3. r., srebrna medalja
Daniel Paleka, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, 3. r., srebrna medalja
Kristijan Štefanec, XV. gimnazija, Zagreb, 4. r., srebrna medalja

U službenoj tablici to izgleda ovako:

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	apsolutni rang	relativni rang	osvojeno
Adrian Beker	7	7	1	7	7	0	29	19	96.88%	zlatna medalja
Petar Orlić	7	2	1	7	7	0	24	55	90.63%	srebrna medalja
Kristijan Štefanec	7	4	1	7	3	0	22	76	86.98%	srebrna medalja
Daniel Paleka	7	2	1	7	3	0	20	101	82.64%	srebrna medalja
Ivan Lazarić	7	1	0	7	1	0	16	183	68.40%	brončana medalja
Lukas Novak	1	2	0	4	1	0	8	394	31.77%	
ekipni rezultat	36	18	4	39	22	0	119	15	86.41%	G, S, S, S, B

Na ceremoniji dodjele medalja Kanađanin *Alex Song* je dobio nagradu za 1. mjesto *summa cum laude*, i s petom zlatnom medaljom u nizu došao na vrh IMO Hall of fame, prestigavši *Teodora von Burga*. Sjedinjene Američke Države su zauzele prvo mjesto, po prvi put nakon 21 godine, Kina drugo mjesto, a sve ostale države su bile daleko iza njih.

Za iduću Međunarodnu matematičku olimpijadu u Hong Kongu ćemo biti još bolje pripremljeni i nadamo se još boljem rezultatu.

Daniel Paleka

Zadaci

Prvi dan, Chiang Mai, Tajvan, petak 10. srpnja 2015.

Zadatak 1. Konačan skup $\mathcal{S}$ točaka u ravnini je *balansiran* ako za bilo koje dvije različite točke A i B u $\mathcal{S}$ postoji točka C u $\mathcal{S}$ takva da je $|AC| = |BC|$. Kažemo da je $\mathcal{S}$ *ekscentričan* ako ni za koje tri u parovima različite točke A, B i C u $\mathcal{S}$ ne postoji točka P u $\mathcal{S}$ takva da je $|PA| = |PB| = |PC|$.

a) Dokaži da za svaki prirodni broj $n \geqslant 3$ postoji balansirani skup koji se sastoji od n točaka.

b) Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ za koje postoji balansirani ekscentrični skup koji se sastoji od n točaka.

Zadatak 2. Odredi sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva takve da je svaki od brojeva

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

potencija broja 2.

(*Potencija broja* 2 *je cijeli broj oblika* 2^n, *gdje je* n *nenegativni cijeli broj.*)

Zadatak 3. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| > |AC|$. Neka je Γ njegova opisana kružnica, H njegov ortocentar, te F nožište visine iz A. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. Neka je Q točka na kružnici Γ takva da je $\sphericalangle HQA = 90^\circ$ i neka je K točka na kružnici Γ takva da je $\sphericalangle HKQ = 90^\circ$. Pretpostavlja se da su točke A, B, C, K i Q u parovima različite i da leže na kružnici Γ tim redom.

Dokaži da se opisane kružnice trokuta KQH i FKM dodiruju.

Drugi dan, Chiang Mai, Tajvan, subota 11. srpnja 2015.

Zadatak 4. Neka je Ω opisana kružnica trokuta ABC i O njeno središte. Kružnica Γ sa središtem A siječe dužinu $\overline{BC}$ u točkama D i E, tako da su točke B, D, E i C u parovima različite i leže na pravcu BC tim redom. Neka su F i G sjecišta kružnica Γ i Ω takva da točke A, F, B, C i G leže na kružnici Ω tim redom. Neka je K drugo sjecište opisane kružnice trokuta BDF i dužine $\overline{AB}$. Neka je L drugo sjecište opisane kružnice trokuta CGE i dužine $\overline{CA}$.

Pretpostavlja se da su pravci FK i GL različiti i da se sijeku u točki X. Dokaži da točka X leži na pravcu AO.

Zadatak 5. Neka je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ za koje vrijedi jednakost

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

za sve realne brojeve x i y.

Zadatak 6. Niz $a_1, a_2, \ldots$ cijelih brojeva zadovoljava sljedeće uvjete:

i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ za sve $j \geqslant 1$;

ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ za sve $1 \leqslant k < \ell$.

Dokaži da postoje prirodni brojevi b i N takvi da je

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

za sve cijele brojeve m i n koji zadovoljavaju $n > m \geqslant N$.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
SAD	5	1			185
Kina	4	2			181
Južna Koreja	3	1	2		161
Sjeverna Koreja	3	3			156
Vijetnam	2	3	1		151
Australija	2	4			148
Iran	3	2	1		145
Rusija		6			141
Kanada	2		4		140
Singapur	1	4	1		139
Ukrajina	2	3	1		135
Tajland	2	3	1		134
Rumunjska	1	4	1		132
Francuska		3	3		120
Hrvatska	1	3	1		119
Peru	2	2	1		118
Poljska	1	1	4		117
Tajvan		4	1	1	115
Meksiko	1	2	3		114
Mađarska		3	3		113
Turska		5			113
Brazil		3	3		109
Japan		3	3		109
Velika Britanija		4	1	1	109
Kazahstan	1	1	2	2	105
Armenija		1	5		104
Njemačka		2	3		102
Hong Kong		2	3	1	101
Bugarska		2	1	2	100
Indonezija		2	4		100
Italija	1	2			100
Srbija	1	1	2	2	100
Bangladeš		1	4	1	97
Slovačka		2	3		97
Makau		1	2	3	88
Filipini		2	2	1	87
Indija		1	2	3	86
Moldavija		1	2	3	85
Bjelorusija			3	3	84
Izrael	1		2	2	83
Saudijska Arabija		1	3	2	81
Gruzija		1	3	1	80
Bosna i Hercegovina			2	4	76
Nizozemska			3	1	76
Češka			3	3	74
Mongolija			2	4	74
Švicarska			3	2	74
Azerbejdžan			2	4	73
Kolumbija			4		72
Novi Zeland			2	4	72
Grčka		1	2	2	71
Argentina			1	4	70

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
Portugal			3	1	70
Sirija		1	1	3	69
Južnoafrička Republika			1	2	68
Belgija		1		3	67
Malezija			3	1	66
Turkmenistan			2	2	64
Uzbekistan			3	2	64
Austrija			3	1	63
Švedska			2	2	63
Alžir		1	1	2	60
Cipar		1		2	58
Tadžikistan (5)		1	1	2	57
Litva			1	1	54
Norveška		1		2	54
Kostarika			2	2	53
Paragvaj			3		53
Danska			2	1	52
Estonija			1	3	51
Šri Lanka				4	51
Španjolska			1	2	47
Slovenija			1	1	46
Makedonija			1	1	45
Island				3	41
Tunis (4)			1	2	41
Albanija				3	37
Irska				3	37
Latvija				3	36
Ekvador				2	27
Maroko				1	27
Finska				1	26
Nikaragva (3)				3	26
Trindad i Tobago (4)		1			26
Pakistan			1		25
Kambodža				2	24
Kosovo				1	24
Nigerija				2	22
Crna Gora (3)			1		19
Lihtenštajn (1)			1		18
Portoriko (3)			1		18
Kirgistan					17
Urugvaj				1	16
Kuba (1)			1		15
Salvador (4)					14
Venecuela (2)				1	13
Čile (2)				1	12
Luksemburg (2)				1	12
Panama (3)					9
Uganda (5)					6
Bolivija (5)					5
Gana (5)					5
Bocvana					1
Tanzanija (3)					0