9. Srednjoeuropska matematička olimpijada 2015. g.

Srednjoeuropska matematička olimpijada, tzv. MEMO, održana je od 25. do 31. kolovoza 2015. godine u Kopru, na jugozapadu Slovenije. Natjecalo se 60 natjecatelja iz zemalja srednje Europe: Mađarske, Švicarske, Austrije, Češke, Slovačke, Litve, Poljske, Njemačke, Hrvatske te domaćina Slovenije. Hrvatsku su predstavljali sljedeći natjecatelji:

Domagoj Bradač, XV. gimnazija, Zagreb
Josip Kelava, Prva gimnazija, Varaždin
Andrija Mandić, XV. gimnazija, Zagreb
Petar Nizić-Nikolac, XV.gimnazija, Zagreb
Patrik Papac, Gimnazija Dubrovnik
Leon Starešinić, XV. gimnazija, Zagreb

Voditelji ekipe bili su *Tonći Kokan* i *Azra Tafro*.

Pripreme za natjecanje održavale su se na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, a trajale su od 6. do 21. lipnja. Nakon toga imali smo pauzu, slobodno vrijeme za sebe. Nekoliko dana prije olimpijade imali smo završne pripreme u sklopu ljetnog kampa mladih matematičara, kojeg je organizirala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Predavanja su nam volonterski držali uglavnom bivši natjecatelji.

U Kopar smo krenuli iz Fužina, gdje se održavao spomenuti matematički kamp. Došli smo u Sloveniju u utorak poslijepodne. Imali smo dovoljno vremena za odmor i koncentraciju prije samog natjecanja koje se održavalo u četvrtak i petak.

Zadaci na pojedinačnom i ekipnom dijelu natjecanja pokazali su se lakšim od prosječnih. Ipak, nije bilo jednostavno sve riješiti. Dobra organizacija i raspodjela poslova doprinijele su izvrsnom rezultatu na ekipnom natjecanju. Do samog kraja rješavali smo zadatke i zapisivali rješenja, stoga nismo bili sigurni koliko ćemo bodova na kraju imati. Rezultate smo saznali tek zadnji dan natjecanja, na dodjeli nagrada i zatvaranju MEMO-a. Bili smo ugodno iznenađeni kada smo vidjeli da imamo maksimalan broj bodova koje je moguće osvojiti na natjecanju. Pokazalo se da nam je jedino takav rezultat mogao donijeti zlato, jer su drugo mjesto osvojili Poljaci sa samo jednim bodom manje od nas. Treće mjesto i brončanu medalju osvojili su Mađari. Na pojedinačnom natjecanju također smo postigli sjajne rezultate. *Domagoj Bradač* osvojio je zlatnu medalju, sa samo jednim bodom manje od maksimalnog mogućeg broja bodova. Uz zlato, Hrvatska je ponijela i dvije srebrne medalje koje su osvojili *Leon Starešinić* i *Petar Nizić-Nikolac* te brončanu medalju koju je osvojio *Andrija Mandić*.

Slovenija se pokazala kao odličan domaćin natjecanja. Uz izlete poput obilaska Kopra, Ljubljane te Postojnske jame, imali smo dovoljno vremena za druženje s ostalim natjecateljima.

Andrija Mandić

Zadaci s pojedinačnog natjecanja, 27. kolovoza 2015.

I-1. Nađi sve surjektivne funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takve da je za sve prirodne brojeve a i b točno jedna od sljedećih jednakosti istinita:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Napomene. $\mathbf{N}$ označava skup svih prirodnih brojeva. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je surjektivna ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$.

I-2. Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. *Unutrašnja dijagonala jednostavnog n-terokuta* je dijagonala koja je sadržana unutar tog n-terokuta. Označimo s $D(P)$ broj svih unutrašnjih dijagonala jednostavnog n-terokuta P te s $D(n)$ najmanju moguću vrijednost od $D(Q)$, gdje je Q neki jednostavni n-terokut. Dokaži da se nikoje dvije unutrašnje dijagonale od P ne sijeku (osim možda u zajedničkoj krajnjoj točki) ako i samo ako je $D(P) = D(n)$.

Napomena. Jednostavni n-terokut je mnogokut s n vrhova koji sam sebe ne presijeca. Mnogokut ne mora nužno biti konveksan.

I-3. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Neka je E presjek pravaca paralelnih s AC i BD koji prolaze kroz B i A, redom. Pravci EC i ED sijeku kružnicu opisanu trokutu AEB još u točkama F i G, redom. Dokaži da točke C, D, F i G leže na istoj kružnici.

I-4. Nađi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje postoje relativno prosti prirodni brojevi a i b veći od 1 takvi da je

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

cijeli broj.

Zadaci s ekipnog natjecanja, 28. kolovoza 2015.

T-1. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $abc = 1$ vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{a}{2b + c^2} + \frac{b}{2c + a^2} + \frac{c}{2a + b^2} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

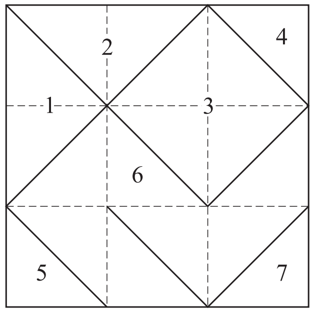
T-2. Odredite sve funkcije $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ takve da jednakost

$$f(x^2 y f(x)) + f(1) = x^2 f(x) + f(y)$$

vrijedi za sve realne brojeve x i y različite od nule.

T-3. U redu stoji n učenika na mjestima od 1 do n. Kad učitelj odvrati pogled, neki učenici promijene svoja mjesta. Kad učitelj vrati pogled, učenici opet stoje u redu. Ako se učenik koji se na početku nalazio na mjestu i sada nalazi na mjestu j, kažemo da se pomaknuo za $|i - j|$ koraka. Odredite najveći mogući zbroj koraka koji svi učenici zajedno mogu postići.

T-4. Neka je N prirodni broj. U svakom od N^2 jediničnih kvadrata ploče $N \times N$ povučena je jedna od dvije dijagonale. Povučene dijagonale dijele danu ploču $N \times N$ na K područja. Za svaki N, odredite najmanju i najveću moguću vrijednost broja K.



Primjer za $N = 3,\ K = 7$

T-5. Neka je ABC šiljastokutni trokut za koji je $|AB| > |AC|$. Dokažite da postoji točka D sa sljedećim svojstvom: za svake dvije različite točke X i Y koje se nalaze u unutrašnjosti trokuta ABC tako da točke B, C, X i Y leže na istoj kružnici te vrijedi

$$|\sphericalangle AXB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CYA| - |\sphericalangle CBA|,$$

pravac XY prolazi točkom D.

T-6. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC u kojem je $|AB| > |AC|$ te neka pravac AI siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pretpostavimo da postoji točka P na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|PI| = |PD|$. Nadalje, neka je točka J simetrična točki I s obzirom na simetralu stranice $\overline{BC}$ te neka je točka Q drugi presjek kružnica opisanih trokutima ABC i APD. Dokažite da je $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAJ|$.

T-7. Nađite sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da vrijedi

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

T-8. Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj. Odredite broj prirodnih brojeva m takvih da je $m \leqslant n$ i da je broj $m^2 + 1$ djeljiv brojem n.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 5 sati.
Vrijeme za postavljanje pitanja: 60 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.