MATEMATIKA

Geometrijska mjesta točaka u prostoru

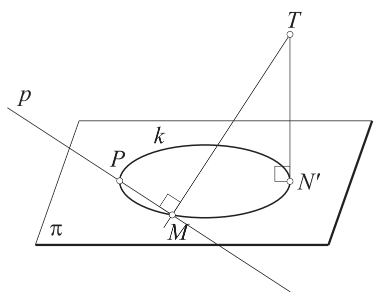
Maja Starčević[1], *Mihaela Bahun*[2]

U ovom radu predstavit ćemo neke probleme u kojima se zadaje geometrijski uvjet na točke u prostoru. Cilj je odrediti skup kojem te točke pripadaju. Drugim riječima, želimo opisati taj skup na drugi, jednostavniji način, odnosno tako da ga je lakše vizualizirati. Potrebno je utvrditi radi li se npr. o krivulji, ravnini ili možda nekom ravninskom liku ili plohi. Također treba odrediti i osnovne karakteristike tog skupa, tj. veličine koje određuju njegove dimenzije i položaj. Takav tip zadataka možemo, naravno, promatrati i u ravnini. Već u toj pojednostavnjenoj situaciji zadaci se smatraju zahtjevnijima, jer se njihovo rješavanje često svodi na to da se na samom početku mora naslutiti o kakvom skupu točaka se radi, i nakon toga se provodi precizan dokaz. U prostornim zadacima je to još teže jer oni zahtijevaju veći geometrijski zor. Prostoručno skiciranje pojedinih točaka skupa, koje nas navodi kako doći do rješenja, ovdje je bitno otežano.

Na nekoliko zadataka koji slijede vidjet ćemo neke metode određivanja geometrijskog mjesta točaka u prostoru. U prva dva zadatka geometrijsko mjesto točaka naći ćemo kao presjek dva skupa kojima te točke pripadaju.

Primjer 1. U ravnini π zadani su točka P i proizvoljan pravac p kroz tu točku. Izvan ravnine π zadana je točka T iz koje je spuštena okomica na pravac p. Nožište te okomice je točka N. Odrediti geometrijsko mjesto svih točaka N.

Rješenje. Neka je p proizvoljan pravac u ravnini π kroz točku P i neka je N nožište okomice iz točke T na pravac p (slika 1). Nadalje, neka je točka V nožište okomice iz točke T na ravninu π. Pretpostavimo za početak da je N različita od P i V. Primijetimo prvo da je trokut PNT pravokutan, s hipotenuzom $\overline{PT}$. Označimo polovište dužine $\overline{PT}$ sa S. Zaključujemo da je $|NS| = |PS| = |TS|$. Dakle, točka N se nalazi na sferi sa središtem u točki S i radijusom jednakim $|PS| = |TS|$. Kako se točka N nalazi i u ravnini π, nalazi se u presjeku ravnine i sfere, odnosno točka N se uvijek nalazi na nekoj kružnici u ravnini π.



Slika 1.

Odredimo sada preciznije tu kružnicu. Kako je ravnina π okomita na pravac TV, svaki pravac koji pripada toj ravnini okomit je na TV. Dakle, pravac p je okomit na TV, a kako je okomit i na pravac NT, p je okomit i na ravninu određenu točkama N, T i V. Time dobivamo da je p okomit i na pravac NV koji pripada toj ravnini. Dakle, trokut NVP je pravokutan s pravim kutom u vrhu N pa se točka N nalazi na kružnici u ravnini π s promjerom $\overline{PV}$.

Obratno, neka je k kružnica u ravnini π s promjerom $\overline{PV}$, gdje je točka V definirana kao i prije. Neka je N proizvoljna točka kružnice k, različita od P i V. Označimo s p

[1] Autorica je iz Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb; e-pošta: mstarcev@math.hr

[2] Autorica je iz II. osnovne škole, Varaždin; e-pošta: mihaelabahun@gmail.com

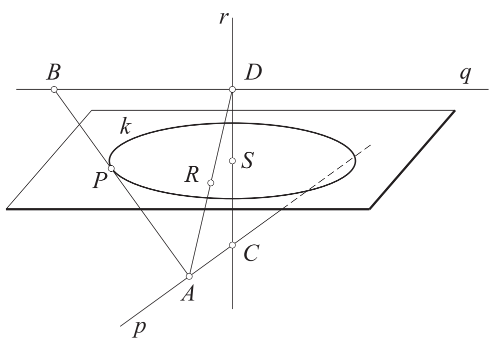
pravac koji prolazi kroz točke P i N. Kut $\sphericalangle PNV$ je očito pravi. Ravnina Σ je ravnina koja prolazi točkama T, N i V. Kako je pravac p okomit na pravce NV i TV, okomit je na ravninu Σ. Dakle, p je okomit na svaki pravac ravnine Σ, odnosno p je okomit na pravac NT. Drugim riječima, točka N zadovoljava geometrijski uvjet zadatka.

Konačno, primijetimo da je točka P nožište okomice iz točke T na pravac koji je tangencijalan na kružnicu k u točki P, dok je točka V nožište okomice iz točke T na pravac PV. Time smo dokazali da je cijela kružnica k geometrijsko mjesto zadanih točaka.

Napomenimo da ukoliko smo već dokazali da svaka točka koja zadovoljava zadani geometrijski uvjet leži na kružnici k (s promjerom $\overline{PV}$), obrat možemo dokazati i jednostavnije na sljedeći način. Neka je N točka na kružnici k različita od P i neka je p jednak pravcu PN. Označimo s N' nožište okomice iz točke T na pravac p. Tada znamo iz prvog dijela dokaza da se N' mora nalaziti na kružnici k, odnosno jedan je od dva presjeka te kružnice i pravca p. Dakle, točka N' se podudara s točkom P ili točkom N. Očito je da se ne može podudarati s točkom P pa dobivamo $N \equiv N'$. Točka N, dakle, odgovara zadanom geometrijskom uvjetu i time je tvrdnja dokazana. □

Primjer 2. Dana su dva mimoilazna pravca p i q koji su međusobno okomiti. Naći geometrijsko mjesto točaka koja su polovišta dužina koje imaju zadanu duljinu d te im je pritom jedna krajnja točka na pravcu p, a druga na pravcu q.

Rješenje. Uzmimo proizvoljnu dužinu $\overline{AB}$ duljine d koja zadovoljava geometrijski opis zadatka. Neka je $A \in p$ i $B \in q$. Označimo s r pravac koji je okomit i na p i na q i siječe oba pravca. Označimo s $\overline{CD}$ dužinu najmanje duljine kojoj su krajnje točke na pravcima p i q redom. Ona pripada pravcu r i neka je C na pravcu p, a D na pravcu q (slika 2).



Slika 2.

Uočimo da je trokut ACD pravokutan, s pravim kutom u vrhu C. Isto tako je i trokut ADB pravokutan s pravim kutom u vrhu D. Označimo s P polovište dužine $\overline{AB}$. Sad zapravo tražimo geometrijsko mjesto točaka P. Označimo sa S polovište dužine $\overline{CD}$. Izračunat ćemo udaljenost točaka P i S te uočiti da ne ovisi o izboru dužine $\overline{AB}$. Nacrtajmo okomicu iz točke P na ravninu kojoj pripada trokut ACD. Neka je nožište te okomice točka R. Ona je ujedno polovište dužine $\overline{AD}$ i trokut PSR je pravokutan s pravim kutom u vrhu R. Tada primjenom Pitagorinog poučka imamo

$$|SP|^2 = |SR|^2 + |PR|^2 .$$

Dužine $\overline{SR}$ i $\overline{PR}$ su srednjice trokuta ACD i ADB redom pa imamo

$$\begin{aligned}|SP|^2 &= \left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|BD|}{2}\right)^2 = \frac{|AD|^2 - |CD|^2}{4} + \frac{|BD|^2}{4} \\ &= \frac{|AD|^2 + |BD|^2}{4} - \frac{|CD|^2}{4} = \frac{|AB|^2}{4} - \frac{|CD|^2}{4} = \frac{d^2}{4} - \frac{|CD|^2}{4} .\end{aligned}$$

Kako duljina $|CD|$ ovisi samo o zadanim pravcima p i q, a d je zadana konstanta, vidimo da sve točke P pripadaju sferi sa središtem u točki S i radijusom $\sqrt{\dfrac{d^2}{4} - \dfrac{|CD|^2}{4}}$.

Primijetimo još da točka P pripada ravnini koja prolazi točkom S i okomita je na pravac r. Konačno, presjek te ravnine i dobivene sfere je kružnica. Označimo ju s k. S obzirom da se radi o glavnoj kružnici spomenute sfere, njeno središte je također točka S te ima radijus jednak radijusu sfere.

Potrebno je dokazati i obrat, tj. da ukoliko imamo točku P koja se nalazi na prethodno definiranoj kružnici k, onda se kroz točku P može nacrtati dužina duljine d kojoj su krajnje točke redom na pravcima p i q te je točka P pritom polovište te dužine. Stoga uzmimo ravninu π koja sadrži pravac p i okomita je na pravac q. Neka je R nožište okomice iz točke P na ravninu π. Točke C i D su definirane kao i prije. Zatim definiramo točku A kao presjek pravaca p i DR. Nadalje, neka je B presjek pravaca q i AP. Kako su pravci PR i BD okomiti na ravninu π, vrijedi $PR \| BD$. S obzirom da je $SR \| AC$ i S je polovište dužine $\overline{CD}$, R je polovište dužine $\overline{AD}$. Tada je $\overline{PR}$ srednjica u trokutu ABD pa je P polovište dužine $\overline{AB}$. Preostaje odrediti duljinu dužine $\overline{AB}$. Analogno kao i u prethodnom dijelu dokaza možemo pokazati da je $|SP|^2 = \dfrac{|AB|^2}{4} - \dfrac{|CD|^2}{4}$. Kako točka P pripada kružnici k, imamo i $|SP|^2 = \dfrac{d^2}{4} - \dfrac{|CD|^2}{4}$ pa konačno dobivamo $|AB| = d$ i time smo dokazali da je kružnica k geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju zadani geometrijski uvjet. $\square$

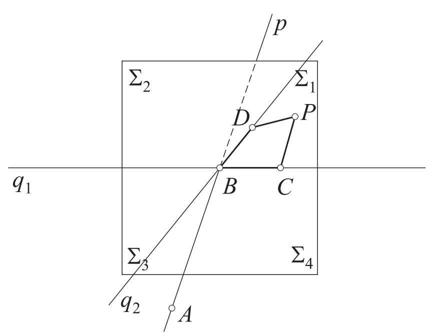
Primijetimo da smo u ovom primjeru trebali imati neku slutnju o tome da zadane točke pripadaju sferi sa središtem u S. Iako se, na prvi pogled, ta činjenica ne čini očitom, možemo uočiti simetričnost geometrijskog uvjeta u odnosu na zadane mimoilazne pravce, što nas može navesti na to da promatramo točku S koja je jednako udaljena od pravaca p i q.

U sljedećem primjeru nije važno na samom početku imati konkretnu ideju o rješenju zadatka, ali je potrebno prilagoditi zadani uvjet tako da bude jednostavniji za promatranje.

Primjer 3. Zadana su dva proizvoljna trokuta u prostoru. Neka je P točka prostora koja se ne nalazi ni u jednoj od ravnina u kojima se nalaze trokuti. Spojimo li vrhove svakog trokuta s točkom P, dobivamo dva tetraedra. Treba naći sve točke P za koje će zbroj volumena ta dva tetraedra biti jednak zadanoj konstanti V.

Rješenje. Označimo površine zadanih trokuta redom s P_1 i P_2. Razlikujemo tri slučaja, kad se ravnine kojima pripadaju trokuti sijeku, kada su paralelne i kad se podudaraju.

Pretpostavimo za početak da se ravnine trokuta sijeku u pravcu p. Uzmimo neku ravninu Σ koja je okomita na pravac p i neka se ravnina Σ i pravac p sijeku u točki B. Nadalje, neka su presjeci ravnine Σ s ravninama zadanih trokuta redom pravci q_1 i q_2. Oni dijele skup $\Sigma \backslash \{q_1, q_2\}$ na četiri dijela: Σ_1, Σ_2, Σ_3 i Σ_4 (slika 3). S obzirom da volumeni tetraedara ovise samo o površinama njihovih baza, a ne i o obliku baza, onda zadane trokute možemo zamijeniti i nekim drugima koji imaju jednake površine, ali su nam jednostavniji za promatranje. Uzmimo stoga umjesto početnih trokuta redom pravokutne trokute ABC i ABD, s pravim kutom kod vrha B, koji imaju jednake površine kao i zadani trokuti i pritom je pravac AB jednak pravcu p. Ti trokuti moraju pripadati



Slika 3.

ravninama kojima pripadaju i zadani trokuti. Njihov položaj u ravninama ne utječe na volumen tetraedara. Neka je P točka u $\Sigma \setminus \{q_1, q_2\}$ koja zadovoljava zadani uvjet. Za početak neka ona pripada nekom određenom dijelu ravnine Σ_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Točke $C \in q_1$ i $D \in q_2$ uvijek možemo odabrati tako da točke B, C, P i D u navedenom poretku čine četverokut ili da točka P pripada dužini $\overline{CD}$.

Na tetraedre $ABCP$ i $ABDP$ možemo gledati i kao na tetraedre s vrhom u A. Tada je $\overline{AB}$ visina svakog od njih. Sada možemo izračunati zbroj njihovih volumena:

$$V = V(ABCP) + V(ABDP) = \frac{1}{3}P(BCP)|AB| + \frac{1}{3}P(BDP)|AB| .$$

Imamo tri slučaja:

i) Ako je $BCPD$ konveksan četverokut, onda vrijedi $P(BCP) + P(BDP) = P(BCPD) = P(BCD) + P(PCD)$. Primijetimo da tada nužno vrijedi $3V > |AB|P(BCD)$. Kako su duljina $|AB|$ i površina trokuta BCD zadane veličine, zaključujemo da je površina trokuta PCD konstantna. Dakle, visina iz P na stranicu $\overline{CD}$ u trokutu PCD mora biti uvijek iste duljine pa P mora pripadati pravcu r koji je paralelan s CD. Pravac r se nalazi na udaljenosti v od pravca CD, pri čemu je

$$v = \frac{6V - 2|AB|P(BCD)}{|AB||CD|} .$$

Dakle, pravac r je udaljen od pravca p za $d = \dfrac{6V}{|AB||CD|} = \dfrac{3V}{P_1} \cdot \dfrac{|BC|}{|CD|}$. Označimo kutove $\sphericalangle CBD = \alpha$ i $\sphericalangle BDC = \beta$. Tada je

$$d = \frac{3V}{P_1}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{1}$$

S druge strane je

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \sin\alpha \ \mathrm{ctg}\,\beta + \cos\alpha . \tag{2}$$

Iskoristimo li jednakost $\sin\beta = (\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\beta})^{-1}$, iz (1) i (2) dobivamo

$$d = \frac{3V}{P_1\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\dfrac{P_2}{P_1} - \cos\alpha\right)^2}} .$$

Dakle, tražene točke P se nalaze na dužini u ravnini Σ koja je za d udaljena od pravca p i čije su krajnje točke na pravcima q_1 i q_2. Nagib pravca kojem pripada ta dužina određen je kutom β, za koji vrijedi

$$\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\dfrac{P_2}{P_1} - \cos\alpha}{\sin\alpha} .$$

Krajnje točke te dužine naravno ne pripadaju traženom geometrijskom mjestu. Iz prethodnog računa slijedi da sve točke te dužine osim njenih krajnjih točaka pripadaju tom geometrijskom mjestu.

ii) Ako je $BCPD$ konkavan četverokut, onda je $P(BCPD) = P(BCD) - P(PCD)$, odnosno vrijedi $3V < |AB|P(BCD)$. Analognim razmatranjem kao u prvom slučaju dolazimo do zaključka da se točke P moraju nalaziti na dužini koja je od pravca CD udaljena za v koji je u ovom slučaju jednak

$$v = \frac{2|AB|P(BCD) - 6V}{|AB||CD|}.$$

Zaključujemo da je ta dužina opet na udaljenosti d od pravca p, pod nagibom β, gdje su d i β jednaki onima u prvom slučaju.

iii) U trećem slučaju se točka P nalazi na dužini $\overline{CD}$, što može vrijediti ako i samo ako je $3V = |AB|P(BCD)$. U tom slučaju su sve točke dužine $\overline{CD}$ tražene točke (osim točaka C i D). Uz iste oznake kao u prethodna dva slučaja, dobivamo jednake vrijednosti za d i β.

Primijetimo da tip četverokuta $BCPD$ ovisi o početnom izboru trokuta ABC i ABD, koje možemo izabrati na beskonačno mnogo načina.

Na analogan način provodimo analizu i ako se točka P nalazi u nekom drugom dijelu ravnine Σ te ćemo kao rezultat dobiti četiri dužine bez krajnjih točaka. Označimo ih s $\overline{E_iF_i}$, $i = 1, \ldots, 4$, gdje je $E_i \in q_1$, $F_i \in q_2$ i neka dužina $\overline{E_iF_i}$ bez krajnjih točaka pripada Σ_i. Ispitat ćemo sada njihov međusobni položaj. Ako imamo npr. postavljene trokute ABC i ABD za analizu točaka P u dijelu ravnine Σ_1, onda ćemo u dijelu Σ_2 umjesto trokuta ABC uzeti trokut ABC', gdje je C' točka ravnine Σ centralno simetrična točki C u odnosu na točku B. Znamo da je udaljenost točke B od dužine $\overline{E_1F_1}$ jednaka $d = \frac{3V}{P_1} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, gdje je kao i prije $\alpha = \sphericalangle CBD$, $\beta = \sphericalangle BDC$. Prema tome je $|BF_1| = \frac{d}{\sin\beta} = \frac{3V}{P_1 \sin\alpha}$. Označimo s α' kut $\sphericalangle C'BD$. Kao i prije dokazujemo da vrijedi $|BF_2| = \frac{3V}{P_1 \sin\alpha'}$. Kako je $\alpha' = 180° - \alpha$, dobivamo $|BF_1| = |BF_2|$ pa se točke F_1 i F_2 podudaraju. Uspoređivanjem rezultata i u ostalim dijelovima ravnine Σ konačno dobivamo da su sve točke koje zadovoljavaju geometrijski uvjet zadatka, a nalaze se u ravnini Σ, točke skupa koji se sastoji od paralelograma, kojem smo oduzeli vrhove.

Na isti način možemo uzeti bilo koju drugu ravninu okomitu na pravac p, analogno postaviti trokute ABC i ABD s pravim kutovima kod vrha B i opet dolazimo do zaključka da je skup traženih točaka u toj ravnini jednak paralelogramu bez vrhova. Konačno, varirajući ravninu Σ, zaključujemo da se skup svih točaka s traženim svojstvom dobiva translacijom opisanog paralelograma bez vrhova, duž pravca p.

Analizirajmo sada situaciju kad su ravnine zadanih trokuta paralelne. Neka je za početak $P_1 \neq P_2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $P_1 > P_2$. Označimo udaljenost između ravnina s h i neka je točka P, koja pripada traženom geometrijskom mjestu, udaljena za x od ravnine u kojoj leži prvi trokut. Tada imamo tri slučaja:

i) Točka P se nalazi između ravnina zadanih trokuta. Vrijedi $V = \frac{1}{3}P_1x + \frac{1}{3}P_2(h-x)$. Zaključujemo da sve točke ravnine koja je na udaljenosti $x = \frac{3V - P_2h}{P_1 - P_2}$ od prve zadane ravnine pripadaju geometrijskom mjestu. Kako vrijedi $0 < x < h$, rješenje postoji za $P_2h < 3V < P_1h$.

ii) Točka P ne leži između zadanih ravnina i bliža je prvoj ravnini. Tada je $V = \frac{1}{3}P_1x + \frac{1}{3}P_2(h+x)$ pa točka P pripada ravnini na udaljenosti $x = \frac{3V - P_2h}{P_1 + P_2}$ od prve ravnine. Rješenje postoji za $3V > P_2h$.

iii) Točka P nije između zadanih ravnina i bliža je drugoj ravnini. Analogno dobivamo $V=\frac{1}{3}P_1x+\frac{1}{3}P_2(x-h)$ pa je $x=\dfrac{3V+P_2h}{P_1+P_2}$ tražena udaljenost ravnine kojoj pripada točka P. Kako je $x>h$, rješenje postoji za $3V>P_1h$.

Zaključujemo, ako je $P_2h<3V<P_1h$, rješenje su dvije ravnine paralelne zadanima, od kojih se jedna nalazi između danih ravnina. Također, ako je $3V>P_1h$, opet dobivamo dvije paralelne ravnine, od kojih nijedna nije između zadanih.

U slučaju kad je $P_1=P_2$, i vrijedi $3V>P_1h$, dobivamo kao i u prethodnom slučaju dvije ravnine koje nisu između zadanih ravnina trokuta, na udaljenosti $\dfrac{3V-P_1h}{2P_1}$ od zadanih. Ako je $P_1=P_2$ i $3V=P_1h$, onda traženo geometrijsko mjesto čine sve točke između zadanih dviju ravnina. U ostalim slučajevima geometrijsko mjesto točaka je prazan skup.

Konačno, ako se ravnine kojima pripadaju zadani trokuti podudaraju, traženo geometrijsko mjesto točaka su dvije ravnine na udaljenosti $\dfrac{3V}{P_1+P_2}$ od ravnine kojima pripadaju trokuti. $\square$

U primjeru koji slijedi problem se može većim dijelom svesti na problem u ravnini. Težina zadatka je u rješavanju dobivenog ravninskog problema. Traženo geometrijsko mjesto dobivamo kao uniju rješenja ravninskih problema.

Primjer 4. Zadane su dvije sfere s_1 i s_2 s radijusima R i $2R$ redom. Sfera s_1 dodiruje s_2 iznutra u točki B. Zadana je i ravnina π kroz točku B koja raspolavlja obje sfere. Na sferi s_2 je odabrana proizvoljna točka A različita od B. Neka su t_1 i t_2 tangente iz točke A na sferu s_1 koje leže u ravnini kojoj pripada pravac AB i koja je okomita na ravninu π. Označimo s D i E dirališta tih tangenti. Neka je točka C polovište dužine $\overline{DE}$. Odrediti geometrijsko mjesto točaka C.

Rješenje. Neka je $A\neq B$ proizvoljna točka sfere s_2 te neka je Σ ravnina koja sadrži pravac AB i okomita je na ravninu π. Presjeci ravnine Σ sa sferama s_1 i s_2 daju redom kružnice k_1 i k_2, sa središtima R_1 i R_2 te radijusima r i $2r$ redom. Kružnica k_1 dodiruje k_2 iznutra u točki B. Neka je A_1 točka za koju je $\overline{A_1B}$ promjer kružnice k_2. Označimo dirališta tangenti iz A_1 na k_1 s D_1 i E_1, a polovište dužine $\overline{D_1E_1}$ s C_1. Točka C_1 pripada traženom geometrijskom mjestu točaka. Iz sličnosti pravokutnih trokuta $A_1R_1D_1$ i $D_1R_1C_1$ dobivamo

$$\frac{|R_1D_1|}{|A_1R_1|}=\frac{|C_1R_1|}{|R_1D_1|}$$

pa je $|C_1R_1|=\dfrac{r}{3}$. Skiciranjem više slučajeva možemo naslutiti da se sve opisane točke C, koje pripadaju ravnini Σ, nalaze na kružnici k s promjerom $\overline{C_1B}$. U nastavku ćemo to i dokazati. Za početak označimo središte te kružnice sa S. Možemo primijetiti da joj je radijus jednak $\dfrac{2}{3}r$.

Promatrajmo sada točku A na kružnici k_2, različitu od B i A_1, takvu da pravci AR_1 i R_1R_2 nisu okomiti. Neka je C polovište dužine kojoj su krajnje točke D i E dirališta tangenti iz točke A na kružnicu k_1. Točka C očito pripada dužini $\overline{AR_1}$. Iz sličnosti pravokutnih trokuta CR_1D i DR_1A dobivamo

$$|CR_1||AR_1| = |R_1D|^2 = r^2 .$$

Neka je F točka takva da je $|SR_2| = 2|SF|$ i $\sphericalangle R_1R_2A = \sphericalangle FSR_2$. Pretpostavljamo da se F nalazi s iste strane pravca R_1R_2 kao i točka A. Označimo s P sjecište pravaca R_1A i R_2F. Sada želimo dokazati da se točka C podudara s točkom P. Očito je da su trokuti FSR_2 i R_1R_2A slični. Dakle, vrijedi $\sphericalangle FR_2S = \sphericalangle R_1AR_2$ pa trokuti R_1PR_2 i R_1R_2A imaju jednake kutove. Zbog sličnosti trokuta R_1PR_2 i R_1R_2A imamo

$$\frac{|PR_1|}{|R_1R_2|} = \frac{|R_1R_2|}{|AR_1|} .$$

Dakle

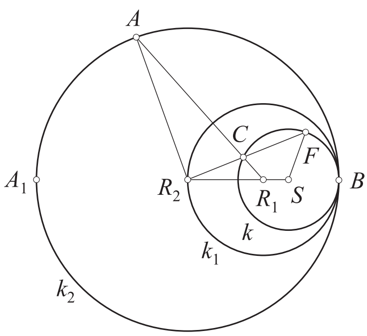
$$|PR_1||AR_1| = r^2 ,$$

iz čega slijedi da se točke C i P podudaraju.

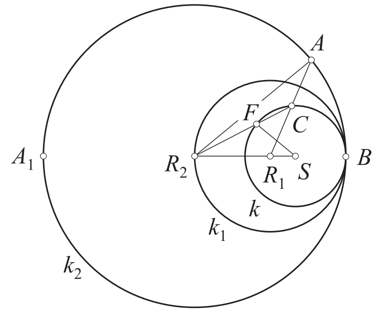
Konačno želimo dokazati da je trokut SFC jednakokračan. Pretpostavimo za početak da se F nalazi izvan dužine $\overline{R_2C}$ (slika 4). Kako je

$$\sphericalangle SR_1C + \sphericalangle CFS = 180^\circ - \sphericalangle CR_1R_2 + \sphericalangle CFS = 180^\circ ,$$

četverokut $SFCR_1$ je tetivni pa je $\sphericalangle SCF = \sphericalangle SR_1F$. Zbog sličnosti trokuta SR_1F i SFR_2 imamo $\sphericalangle SR_1F = \sphericalangle SFR_2$ pa je i $\sphericalangle SCF = \sphericalangle SFC$ iz čega je $|SC| = |SF| = \frac{1}{2}|SR_2| = \frac{2}{3}r$.



Slika 4.



Slika 5.

Pogledajmo još i slučaj kad se F nalazi na dužini $\overline{R_2C}$ (slika 5). Imamo

$$\sphericalangle SR_1C = 180^\circ - \sphericalangle CR_1R_2 = 180^\circ - \sphericalangle SFR_2 = \sphericalangle SFC$$

pa je četverokut $SCFR_1$ tetivni. Primijetimo da su zbog sličnosti trokuta SR_1F i SFR_2 kutovi $\sphericalangle SR_1F$ i $\sphericalangle SFR_2$ jednaki. Prema tome je $\sphericalangle SCF = 180^\circ - \sphericalangle SR_1F = 180^\circ - \sphericalangle SFR_2 = \sphericalangle SFC$. Dakle, opet dobivamo $|SC| = |SF| = \frac{2}{3}r$.

U oba slučaja možemo zaključiti da se točka C nalazi na kružnici k.

Proučimo još i slučaj kad je A točka za koju je pravac AR_1 okomit na pravac R_1R_2. Kako je $|AR_2| = 2|R_1R_2| = 2r$, slijedi $|AR_1| = r\sqrt{3}$. Imamo kao i prije $|CR_1||AR_1| = r^2$ iz čega dobivamo $|CR_1| = r\frac{\sqrt{3}}{3}$. Tada je $|SC|^2 = |CR_1|^2 + |R_1S|^2 = \frac{4}{9}r^2$, dakle $|SC| = \frac{2}{3}r$ te se i u ovom slučaju točka C nalazi na kružnici k.

Varirajući ravninu Σ koja presijeca zadane sfere s_1 i s_2, konačno zaključujemo da se sve točke koje zadovoljavaju zadani uvjet nalaze na sferi koja dodiruje zadane sfere s_1 i s_2 iznutra u točki B i radijusa je $\frac{2}{3}R$.

Dokažimo obrat. Neka je $C \neq B$ točka na sferi $\mathcal{S}$ koja dodiruje sfere s_1 i s_2 iznutra u točki B i radijusa je $\frac{2}{3}R$. Neka je Σ ravnina koja prolazi točkama B i C i okomita je na ravninu π. Označimo s k_1 i k_2 kružnice koje su presjeci ravnine Σ sa sferama s_1 i s_2. Neka su one radijusa r i $2r$ i neka su njihova središta točke R_1 i R_2 redom. Presjek ravnine Σ i sfere $\mathcal{S}$ je kružnica, označimo ju s k, sa središtem u S radijusa $\frac{2}{3}r$. Dakle $C \in k$. Kružnica k dodiruje kružnice k_1 i k_2 iznutra u točki B.

Neka je točka A presjek pravca R_1C i sfere s_2, s iste strane pravca R_1R_2 u ravnini Σ kao i točka C. Točka A očito pripada ravnini Σ, odnosno kružnici k_2. Neka su t_1 i t_2 tangente iz točke A na sferu s_1 koje leže u ravnini Σ, dakle to su tangente i na kružnicu k_1. Neka je C' polovište dužine $\overline{DE}$, gdje su D i E dirališta tih tangenti. Iz prvog dijela dokaza znamo da se točka C' nalazi na kružnici k. Ta točka se nalazi i na dužini $\overline{AR_1}$. Prema tome, točka C' se podudara s točkom C pa ova zadovoljava geometrijski uvjet.

Konačno, zaključujemo da je traženo geometrijsko mjesto točaka sfera (bez točke B), koja je homotetična sferi s_1 s obzirom na točku B, s koeficijentom homotetije $\frac{2}{3}$.

$\square$

Literatura

[1] R. S. HEATH, *Solid geometry*, Rivingtons, London (1922).

[2] M. BAHUN, *Napredne teme iz geometrije prostora u nastavi matematike*, Diplomski rad, PMF, Matematički odsjek, Zagreb (2014).