Nejednakost između težinske aritmetičke i težinske geometrijske sredine

Šefket Arslanagić[1]

U ovom radu ćemo dokazati nejednakost između težinske aritmetičke i težinske geometrijske sredine. Najprije ćemo definirati težinske sredine. Neka su $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dva konačna niza pozitivnih brojeva. Brojevi

$$A(a;p) = \frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n},$$

$$G(a;p) = (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\ldots+p_n}},$$

$$H(a;p) = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{\dfrac{p_1}{a_1} + \dfrac{p_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{p_n}{a_n}},$$

$$K(a;p) = \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \right)^{\frac{1}{2}},$$

nazivaju se težinska aritmetička, težinska geometrijska, težinska harmonijska i težinska kvadratna sredina. Između njih postoji veza

$$H(a;p) \leqslant G(a;p) \leqslant A(a;p) \leqslant K(a;p), \tag{1}$$

gdje znaci jednakosti vrijede ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Mi ćemo dokazati najčešću i najvažniju od ovih nejednakosti, tj.

$$G(a;p) \leqslant A(a;p). \tag{2}$$

Dokaz. Lako se dokazuje da za $x > 0$ vrijedi nejednakost

$$\ln x - x + 1 \leqslant 0. \tag{3}$$

(Promatra se funkcija $y = \ln x - x + 1$, $x > 0$. Kako je $y' = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$, te $y' = 0$ za $x = 1$, $y' > 0$ za $0 < x < 1$ i $y' < 0$ za $x > 1$, to je $y_{\max} = 0$ za $x = 1$ te $y \leqslant y_{\max} = 0$ za sve $x > 0$, tj. $\ln x - x + 1 \leqslant 0$).

Ako sada stavimo $x = \dfrac{a_k}{A(a;p)}$ u (3), dobijemo:

$$\ln \frac{a_k}{A(a;p)} - \frac{a_k}{A(a;p)} + 1 \leqslant 0 \iff \ln \frac{a_k^{p_k}}{A(a;p)^{p_k}} - \frac{p_k a_k}{A(a;p)} + p_k \leqslant 0.$$

Ako ovdje stavimo $k = 1, 2, \ldots, n$ i tako dobivene nejednakosti zbrojimo, dolazimo do nejednakosti

$$\ln \frac{a_1 p^1 a_2 p^2 \ldots a_n p^n}{A(a;p)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}} \leqslant 0,$$

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

odakle slijedi nejednakost

$$\ln \frac{a_1 p^1 a_2 p^2 \ldots a_n p^n}{A(a;p)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}} \leqslant 0,$$

tj.

$$A(a;p) \geqslant G(a;p).$$

Stavimo li u (2) $a_1 = \dfrac{1}{b_1}$, $a_2 = \dfrac{1}{b_2}$,$\ldots, a_n = \dfrac{1}{b_n}$ dobijemo

$$\frac{\dfrac{p_1}{b_1} + \dfrac{p_2}{b_2} + \ldots + \dfrac{p_n}{b_n}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \geqslant \frac{1}{(b_1^{p_1} b_2^{p_2} \ldots b_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\ldots+p_n}}},$$

što je ekvivalentno s

$$(b_1^{p_1} b_2^{p_2} \ldots b_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\ldots+p_n}} \geqslant \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{\dfrac{p_1}{b_1} + \dfrac{p_2}{b_2} + \ldots + \dfrac{p_n}{b_n}}.$$

Ako ovdje umjesto b_k stavimo a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dobijemo nejednakost

$$G(a;p) \geqslant H(a;p).$$

Napomena 1. Stavljajući $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$, tj. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, dobijemo "obične" sredine

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$
$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$
$$H = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}},$$
$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Sada ćemo nejednakost između težinskih brojnih sredina (2) primijeniti kod dokazivanja raznih nejednakosti.

Nejednakost 1. Dokazati da za $x, y \geqslant 0$: $x + y = 1$ i $a, b > 0$ vrijedi nejednakost

$$ax + by \geqslant a^x b^y. \tag{4}$$

Dokaz. Stavljajući $p_1 = x = \dfrac{m}{m+n}$ i $p_2 = y = \dfrac{n}{m+n}$; $(x + y = 1)$ gdje za $m, n \in \mathbf{N}$, iz (2) dobijemo

$$\frac{m}{m+n} a + \frac{n}{m+n} b \geqslant a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}},$$

a odavde

$$ax + by \geqslant a^x b^y.$$

Ovdje smo uzeli da su x i y racionalni brojevi. Ako su x i y realni nenegativni brojevi, tada postoje dva niza racionalnih brojeva $(r_n)_{n\geqslant 0}$ i $(s_n)_{n\geqslant 0}$ za koje vrijedi $r_n \to x$ i

$s_n \to y$, $(r_n + s_n = 1)$. Tada imamo

$$\begin{aligned} ar_n + bs_n &\geqslant a^{r_n} b^{s_n}, \\ ar_n + b(1 - r_n) &\geqslant a^{r_n} b^{1-r_n}. \end{aligned}$$

Za $n \to +\infty$, dobivamo

$$ax + by \geqslant a^x b^y.$$

Jednakost u (4) vrijedi ako i samo ako je $a = b$ i $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Nejednakost 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b} \leqslant 1. \tag{5}$$

Dokaz 1. Ova nejednakost je ekvivalenta sljedećoj

$$(ab)^c (bc)^a (ca)^b \leqslant 1.$$

Na osnovu nejednakosti (2) dobijemo

$$[(ab)^c (bc)^a (ca)^b]^{\frac{1}{a+b+c}} \leqslant \frac{1}{a+b+c}(a \cdot bc + b \cdot ca + c \cdot ab).$$

odnosno zbog $abc = 1$,

$$[(ab)^c (bc)^a (ca)^b]^{\frac{1}{a+b+c}} \leqslant \frac{3}{a+b+c} \leqslant 1 \tag{6}$$

jer je zbog $A \geqslant G$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} = 1$, tj. $\dfrac{3}{a+b+c} \leqslant 1$.

Sada iz (6) slijedi

$$(ab)^c (bc)^a (ca)^b \leqslant 1,$$

tj.

$$a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b} \leqslant 1.$$

Jednakost u (5) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = 1$.

Dat ćemo još dva dokaza nejednakosti (5) koji su kratki i elegantni, a u kojima nećemo koristiti nejednakost (2).

Dokaz 2. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $c \geqslant b \geqslant a > 0$ (jer je dana nejednakost simetrična), pa je zbog $abc = 1$, $c \geqslant 1$, kao i $ab \leqslant 1$ i $a \leqslant 1$. Sada imamo

$$
\begin{aligned}
a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b} &= (abc)^a\cdot a^{b+c-a}b^cc^b \quad (\text{zbog } abc=1, \text{ te } c=\frac{1}{ab})\\
&= a^{b+c-a}b^c\cdot\frac{1}{a^bb^b} = a^{c-a}b^{c-b} = (ab)^{c-b}\cdot a^{b-a}\\
&\leqslant 1^{c-b}\cdot 1^{b-a} = 1 \quad (\text{zbog } ab\leqslant 1 \text{ i } a\leqslant 1).
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}\leqslant 1.$$

Dokaz 3. Zbog uvjeta $abc=1$ imamo:

$$(abc)^{a+b+c}=1,$$

tj.

$$a^{a+b+c}\cdot b^{a+b+c}\cdot c^{a+b+c}=1 \iff a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}=\frac{1}{a^ab^bc^c}\leqslant 1.$$

Posljednja nejednakost je točna jer ako je neki od a,b,c pojedinačno veći ili manji od 1, tada je

$$a^a\geqslant a,\quad b^b\geqslant b,\quad c^c\geqslant c,\qquad \text{tj.}\qquad a^ab^bc^c\geqslant abc=1.$$

Nejednakost 3. Neka su a,b,c pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$4(a+b+c)\geqslant 3[a+(ab)^{\frac{1}{2}}+(abc)^{\frac{1}{3}}]. \tag{7}$$

Dokaz. Zbog nejednakosti $A\geqslant G$ imamo:

$$
\begin{aligned}
4(a+b+c) &= 3a+\Big(\frac{a}{4}+b\Big)+\Big(\frac{a}{2}+2b\Big)+\Big(\frac{a}{4}+b+4c\Big)\\
&\geqslant 3a+\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}+3\sqrt[3]{abc}=3(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}).
\end{aligned}
$$

Jednakost u (7) vrijedi ako i samo ako je $b=\dfrac{a}{4}$ i $c=\dfrac{a}{16}$, tj. $a=4b=16c$.

Napomena 2. Za dokaz nejednakosti (7) smo koristili nejednakost (2) u specijalnom slučaju kada je $n=2$ i $n=3$ te $p_1=p_2=\dfrac{1}{2}$, $(p_1+p_2)=1$ i $p_1=p_2=p_3=\dfrac{1}{3}$, $(p_1+p_2+p_3)=1$, tj. tzv. "običnu" nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.

Nejednakost 4. Neka su a,b,c duljine stranica trokuta ABC. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c\leqslant a^ab^bc^c. \tag{8}$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti (2) između težinske aritmetičke i težinske geometrijske sredine imamo

$$
\begin{aligned}
&\left[\Big(\frac{a+b-c}{a}\Big)^a\cdot\Big(\frac{b+c-a}{b}\Big)^a\cdot\Big(\frac{c+a-b}{c}\Big)^c\right]^{\frac{1}{a+b+c}}\\
&\qquad\leqslant\frac{1}{a+b+c}\Big(a\cdot\frac{a+b-c}{a}+b\cdot\frac{b+c-a}{b}+c\cdot\frac{c+a-b}{c}\Big)=1\\
&\iff \frac{(a+b-c)^a}{a^a}\cdot\frac{(b+c-a)^b}{b^b}\cdot\frac{(c+b-a)^c}{c^c}\leqslant 1\\
&\iff (a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c\leqslant a^ab^bc^c.
\end{aligned}
$$

Jednakost u (8) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$ (jednakostranični trokut).

Nejednakost 5. (Youngova nejednakost) Neka su x i y pozitivni realni brojevi. Ako brojevi $a, b > 0$ zadovoljavaju uvjet $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$, tada vrijedi nejednakost

$$xy \leqslant \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b. \tag{9}$$

Dokaz. Koristit ćemo nejednakost (2) u slučaju kada je $p_1 + p_2 = 1$, tj.

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \leqslant p_1 a_1 + p_2 a_2.$$

Uzmemo li $a_1 = x^a$, $a_2 = y^b$, $p_1 = \dfrac{1}{a}$, $p_2 = \dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ dobijemo

$$(x^a)^{\frac{1}{a}} \cdot (y^b)^{\frac{1}{b}} \leqslant \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b,$$

odnosno

$$xy \leqslant \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b.$$

Jednakost u (9) vrijedi ako i samo ako je $a = b = 2$ i $x = y$.

Literatura

[1] Šefket Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] S. D. Mitrinović, *Nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.