ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2015. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/ 263.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadaci iz matematike

3483. Za koje sve prirodne brojeve k je $2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k$ djeljivo sa 17.

3484. Nađi sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$1 + (y - z)^2 = \frac{1}{x+5}$$
$$\sqrt{x+4} = y^4 - 2y^3 - 14y^2 + 6y + 9.$$

3485. Za koje sve realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 3} + \sqrt{y^2 - 4\sqrt{3}y + 16} + \sqrt{z^2 - 8\sqrt{5}z + 89} \leq 6.$$

3486. Odredi sve cijele brojeve x za koje je izraz $x^2 + 3x + 24$ potpuni kvadrat.

3487. Za pozitivne brojeve a, b, c dokaži nejednakost

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Kada se postiže jednakost?

3488. Dan je jednakokračan trokut ABC ($|AC| = |BC|$) s osnovicom duljine a i visinom duljine h. Dužina $\overline{AB}$ je tetiva kružnice koja dira krakove trokuta ABC. Odredi polumjer te kružnice pomoću a i h.

3489. Četverokut je podijeljen na pet manjih tetivnih četverokuta. Svaka stranica polaznog četverokuta je stranica po jednog manjeg, a peti je sadržan unutar polaznog. Dokaži da je polazni četverokut također tetivni.

3490. Na kružnicu su povučene dvije paralelne tangente i one ju diraju u točkama A i D. Treća tangenta na tu kružnicu siječe ove dvije u točkama B i C. Ako je r polumjer kružnice, koliko je $|AB| \cdot |CD|$?

3491. Odredi sve konveksne četverokute u kojima su zbrojevi sinusa nasuprotnih kutova međusobno jednaki.

3492. Ako su α, β korijeni jednadžbe $x^2 + px + 1 = 0$ i γ, δ korijeni jednadžbe $x^2 + qx + 1 = 0$, dokaži jednakost

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2.$$

3493. Dužina $\overline{AB}$ je promjer četverokutu $ABCD$ opisane kružnice. Neka je P točka na stranici $\overline{CD}$, a Q nožište okomice povučene iz P na stranicu $\overline{AB}$. Dokaži jednakost

$$|AQ| \cdot |QB| - |CP| \cdot |PD| = |PQ|^2.$$

3494. Riješi Diofantovu jednadžbu

$$7x^2 + 5y + 13 = 0.$$

3495. Na koliko različitih načina možeš od prva 24 prirodna broja izabrati tri, tako da im suma bude djeljiva s 3?

3496. Svi plošni kutovi uz vrh paralelepipeda su jednaki 45°. Duljine njegovih bridova uz taj vrh su a, b, c. Koliki je obujam paralelepipeda?

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 394. Kad su tri jednaka otpornika spojena serijski na neki izvor, struja u tom krugu iznosi 200 miliampera (mA). Kolika će biti struja ako dva otpornika spojimo paralelno i tu paralelu spojimo serijski s trećim otpornikom na isti izvor?

OŠ – 395. Lokomotiva ima masu 80 tona i vuče 20 vagona. Svaki vagon ima masu 30 tona i u svakome je 20 tona tereta. Faktor trenja između kotača i pruge iznosi 0.008, a snaga lokomotive je 1.5 MW. Kolika je najveća brzina koju ta kompozicija može postići?

OŠ – 396. Izračunaj promjer kugle koja se može napraviti od komada željeza mase 1 kg. Gustoća željeza je 7800 kg/ m^3.

OŠ – 397. U menzuri unutarnjeg promjera 2 centimetra je 200 grama žive. Izračunaj visinu stupca žive i tlak na dnu menzure? Gustoća žive je 13 600 kg/m^3.

1595. Izvor zvuka giba se jednoliko brzinom $9\ \text{m/s}$. Opažač koji miruje čuje ton frekvencije 1519 Hz, a vlastita frekvencija izvora je 1500 Hz. Odredi kut smjera kretanja izvora i smjera izvor-opažač. Brzina zvuka je $340\ \text{m/s}$.

1596. Sfera radijusa 7 cm nabijena je jednoliko nabojem $+3\ \text{nC}$. Koncentrično njoj nalazi se sfera radijusa 10 cm površinske gustoće naboja $+12\ \text{nC/m}^2$. Odredi električno polje uz vanjski rub veće sfere. Odredi električni potencijal u središtu obiju sfera.

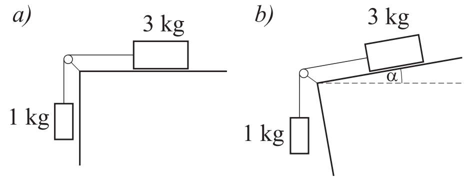
1597. Divergentna leća daje 4.5 puta umanjenu, virtualnu i uspravnu sliku. Odredi jačinu leće ako je udaljenost predmeta i slike 14 cm.

1598. Idealan Carnotov toplinski stroj obavlja rad od 396 J u 3 sekunde. Apsolutna temperatura hladnijeg spremnika je 30% manja od temperature toplijeg. Odredi energiju koju u jednoj sekundi stroj uzima od toplijeg rezervoara, i energiju koju u jednoj sekundi predaje hladnijem rezervoaru.

1599. Odredi prividnu veličinu (u stupnjevima) Plutonovog satelita Harona, gledano s površine Plutona. Koliko je puta to veće od Mjeseca gledano sa Zemlje? Udaljenost Plutona i Harona je 19 600 km (između dvaju središta), radijus Harona je 603.5 km, a Plutona 1185 km.

1600. Putanja Zemlje oko Sunca je elipsa numeričkog ekscentriciteta $\varepsilon = 0.0167$. Koristeći prvi i drugi Keplerov zakon, odredi koliko vremena Zemlja provede na polovici elipse bliže Suncu. Rezultat izrazi u godinama i u danima, uzeti 365.25 dana za trajanje godine.

1601. Sustavu utega i koloture na slici a) nakosimo podlogu za kut α kao na slici b). Za $\alpha = 10^\circ$ utezi se gibaju jednoliko prema dolje. Koliki je koeficijent trenja podloge i gornjeg utega? Kojim će se ubrzanjem utezi gibati ako α povećamo na 15°?



C) Rješenja iz matematike

3455. *Odredi sva pozitivna cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$(1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!\,.$$

Prvo rješenje. Za $x, y \geqslant 2$ brojevi $1 + x!$ i $1 + y!$ su neparni, a $(x + y)!$ je paran, pa ovdje nema rješenja.

Promatrajmo slučaj $x = 1$. Jednadžba postaje

$$\begin{aligned} 2(1 + y!) &= (1 + y)!, \\ 2 + 2y! &= (1 + y)y!, \\ 2 &= (y - 1)y!. \end{aligned}$$

Odavde je $y = 2$.

Za $y \geqslant 3$ broj 3 dijeli $(1 + y)!$, ali ne dijeli $2(1 + y!)$. Broj $y = 1$ ne zadovoljava jednadžbu.

Dakle, imamo dva rješenja: $x = 1$, $y = 2$ i $x = 2$, $y = 1$.

Ur.

Drugo rješenje. Imamo

$$(1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!$$

$$1 + y! + x! + x!y! = (x + y)! \ / \ : (x!y!)$$

$$\frac{1}{x!y!} + \frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} + 1 = \frac{(x+y)!}{x!y!} = C^x_{x+y} = C^y_{x+y}$$

odakle je $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

Sara Džebo (3),
Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

3456. *Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a^3 + b^3 = 13$ i $a^9 + b^9 = -299$. Odredi ab.*

Prvo rješenje. Kako je

$$a^9 + b^9 = (a^3 + b^3)(a^6 - a^3b^3 + b^6)$$

imamo

$$a^6 - a^3b^3 + b^6 = \frac{-299}{13} = -23.$$

Oduzmemo li ovu jednakost od

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 = 13^2 = 169,$$

dobivamo $3a^3b^3 = 192$, odakle je $ab = 4$.

Dženana Šabović (3),
Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Imamo

$$13^3 = (a^3 + b^3)^3 = a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9$$
$$= -299 + 3(a^6b^3 + a^3b^6).$$

odakle je

$$832 = a^6b^3 + a^3b^6 = a^3b^3(a^3 + b^3) = a^3b^3 \cdot 13,$$

tj. $a^3b^3 = \dfrac{832}{13} = 64$, odnosno $ab = 4$.

Teo Samardžija (1),
SŠ "Donji Miholjac", Donji Miholjac

Treće rješenje. Uvedemo zamjenu $a^3 = u$ i $b^3 = v$, pa dobijemo sustav

$$u + v = 13$$
$$u^3 + v^3 = -299.$$

Izrazimo $u = 13 - v$ i uvrstimo u drugu jednadžbu. Nakon sređivanja imamo jednadžbu

$$v^2 - 13v + 64 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $v_{1,2} = \dfrac{13 \pm i\sqrt{87}}{2}$. Za u se dobije $u_{1,2} = \dfrac{13 \mp i\sqrt{87}}{2}$. Umnožak u_1v_1 isti je kao umnožak u_2v_2 i iznosi 64, pa nakon zamjene imamo $a^3b^3 = 64$, odnosno $ab = 4$.

Heike Roklicer (2),
SŠ "Donji Miholjac", Donji Miholjac

3457. *Dan je niz brojeva rekurzivno:* $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_n = a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1}$ *za* $n \geq 3$. *Pokaži da je* $a_n \leq 3^n$ *za svaki prirodan broj* n.

Rješenje. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.

Za $n = 0$ je $a_0 = 1 \leqslant 3^0$, $a_1 = 3 \leqslant 3^1$, $a_2 = 9 \leqslant 3^2$. Zadovoljena je baza indukcije.

Pretpostavimo da je $a_k \leqslant 3^k$ za neko $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $n \geqslant 3$. Tada je

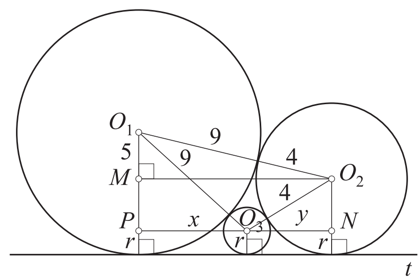
$$a_n = a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1}$$
$$\leqslant 3^{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1}$$
$$= 3^{n-3}(1 + 3 + 9) = 13 \cdot 3^{n-3}$$
$$< 27 \cdot 3^{n-3} = 3^n.$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3458. *Kružnice polumjera 9 i 4 cm dodiruju se izvana. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje ove dvije izvana i njihovu zajedničku tangentu.*

Rješenje. Iz trokuta O_1O_2M imamo

$$|O_2M|^2 = |O_1O_2|^2 - |O_1M|^2$$
$$|O_2M| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}.$$



Označimo

$$x = |O_3P|, \qquad y = |O_3N|.$$

Tada iz trokuta O_1O_3P dobivamo

$$x^2 = (9 + r)^2 - (9 - r)^2 = 36r$$

tj. $x = 6\sqrt{r}$.

Nadalje, iz trokuta O_3O_2N imamo

$$y^2 = (4 + r)^2 - (4 - r)^2 = 16r$$

tj. $y = 4\sqrt{r}$.

Dakle, $x + y = 10\sqrt{r}$, a budući da je $x + y = |O_2M| = 12$ cm slijedi $10\sqrt{r} = 12$ tj. $\sqrt{r} = \dfrac{6}{5}$ odnosno $r = \dfrac{36}{25}$ cm.

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3459. *Na stranici* $\overline{AD}$ *i dijagonali* $\overline{AC}$ *paralelograma* $ABCD$ *dane su točke* M *i* N *tako da je* $|AM| = \dfrac{1}{5}|AD|$ *i* $|AN| = \dfrac{1}{6}|AC|$. *Dokaži da su točke* B, N *i* M *kolinearne. U kojem omjeru točka* N *dijeli dužinu* $\overline{MB}$*?*

Rješenje. Pokažimo najprije da su točke M, N i B kolinearne.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN},$$

$$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA},$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}),$$

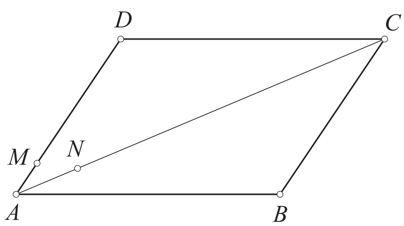
$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{DA}$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{30}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{30}(5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA})$$

$$\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{NB}=\frac{1}{6}(5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}).$$



Dakle, $\overrightarrow{NB}=5\overrightarrow{MN}$, što znači da su vektori $\overrightarrow{NB}$ i $\overrightarrow{MN}$ paralelni pa su točke M, N i B kolinearne. Točka N dijeli dužinu $\overrightarrow{MB}$ u omjeru $\overrightarrow{MN}:\overrightarrow{NB}=1:5$.

Ur.

3460. *Točka C je polovište promjera $\overline{AB}$ kružnice $ABED$, pri čemu je tetiva $\overline{DE}$ paralelna s $\overline{AB}$. Pravac AP okomit je na AD i siječe ED u točki P. Pokaži da vrijedi jednakost*

$$|PC|^2=|AP|^2+|AC|^2+|AE|^2\,.$$

Rješenje. Imamo

$\sphericalangle DAB=\sphericalangle ABE=\alpha$,

$\sphericalangle PAB=90^\circ+\alpha$,

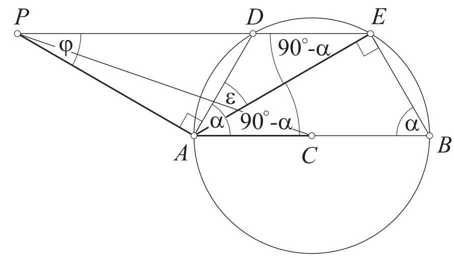
$\sphericalangle BAE=\sphericalangle PEA=90^\circ-\alpha$ te

$\varepsilon=\sphericalangle DAE=\alpha-(90^\circ-\alpha)=2\alpha-90^\circ$ i

$\sphericalangle PAE=90^\circ+\varepsilon=2\alpha$.

Sada je $\varphi=\sphericalangle APE=180^\circ-(90^\circ-\alpha+2\alpha)=90^\circ-\alpha$, te je trokut PAE jednakokračan, a odavde

$$|AP|=|AE|. \tag{1}$$



Dalje imamo na osnovu poučka o kosinusu iz trokuta PAC:

$$|PC|^2=|AP|^2+|AC|^2-2|AP|\cdot|AC|\cos(90^\circ+\alpha)$$

tj.

$$|PC|^2=|AP|^2+|AC|^2+2|AP|\cdot|AC|\sin\alpha \tag{2}$$

Iz pravokutnog trokuta ABE imamo:

$$\sin\alpha=\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{|AE|}{2|AC|}. \tag{3}$$

Konačno, iz (1), (2) i (3) dobivamo

$$|PC|^2=|AP|^2+|AC|^2+2|AP|\cdot|AC|\cdot\frac{|AE|}{2|AC|}$$

tj.

$$|PC|^2=|AP|^2+|AC|^2+|AE|^2.$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3461. *Ako su a, b, c, d površine strana tetraedra volumena V i h_a, h_b, h_c, h_d odgovarajuće mu visine, dokaži nejednakost*

$$(a+b+c+d)(h_a+h_b+h_c+h_d)\geq 48V\,.$$

Prvo rješenje. Koristeći A-H nejednakost

$$\frac{4}{\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}}\leqslant\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i,\ \text{za}\ x_i>0,\ i=1,2,3,4$$

dobivamo

$$\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leqslant\frac{1}{4}(a+b+c+d).$$

Odavde je

$$16 \leqslant (a+b+c+d)\left(\frac{h_a}{3V}+\frac{h_b}{3V}+\frac{h_c}{3V}+\frac{h_d}{3V}\right)$$

tj.

$$48V \leqslant (a+b+c+d)(h_a+h_b+h_c+h_d).$$

Ur.

Drugo rješenje. Upotrijebit ćemo Cauchy-Schwartzovu nejednakost:

$$\begin{aligned}&\left((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2+(\sqrt{d})^2\right)\\&\quad\cdot\left((\sqrt{h_a})^2+(\sqrt{h_b})^2+(\sqrt{h_c})^2+(\sqrt{h_d})^2\right)\\&\geqslant\left(\sqrt{ah_a}+\sqrt{bh_b}+\sqrt{ch_c}+\sqrt{dh_d}\right)^2\\&=(4\sqrt{3V})^2=16\cdot 3V=48V.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

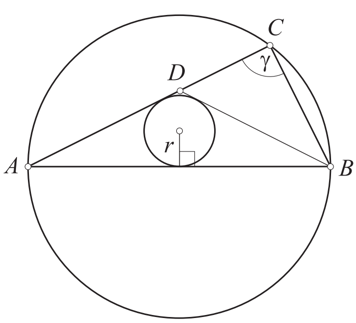
$$a=b=c=d \quad \text{i} \quad h_a=h_b=h_c=h_d.$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3462. *U trokutu ABC je* $|AC|:|BC|=2:1$ *i kut* $\gamma=\arccos\frac{3}{4}$. *Na stranici* $\overline{AC}$ *dana je točka D takva da je* $|CD|:|AD|=1:3$. *Odredi omjer polumjera opisane kružnice trokuta ABC i polumjera upisane kružnice trokuta ABD.*

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}&|CD|:|AD|=1:3,\quad |AD|=3|CD|,\\&|AC|:|BC|=2:1,\quad |AC|=2|BC|,\\&4|CD|=2|BC| \ /\ :2\\&|BC|=2|CD|,\\&|AC|=4|CD|.\end{aligned}$$



Iz $\triangle BCD$ dobivamo:

$$\begin{aligned}|BD|^2&=|BC|^2+|CD|^2-2|BC|\cdot|CD|\cdot\cos\gamma\\&=4|CD|^2+|CD|^2-4|CD|^2\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right)\\&=5|CD|^2-4|CD|^2\cdot\frac{3}{4}=2|CD|^2\end{aligned}$$

tj. $|BD|=\sqrt{2}|CD|$.

Nadalje, iz $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}|AB|^2&=|AC|^2+|BC|^2-2|AC||BC|\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right)\\&=16|CD|^2+4|CD|^2-4|CD|^2\cdot 3\\&=20|CD|^2-12|CD|^2=8|CD|^2\end{aligned}$$

tj. $|AB|=2\sqrt{2}|CD|$.

$$\begin{aligned}R&=\frac{|AB|\cdot|AC|\cdot|BC|}{4P}\\&=\frac{2\sqrt{2}|CD|\cdot 4|CD|\cdot 2|CD|}{4\cdot\dfrac{|AC|\cdot|BC|}{2}\sin\gamma},\end{aligned}$$

a kako je $\sin\gamma=\frac{\sqrt{7}}{4}$, dobivamo

$$R=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}|CD|.$$

Nadalje

$$\begin{aligned}r&=\frac{P}{S}\\s&=\frac{|AB|+|BD|+|AD|}{2}\\&=\frac{2\sqrt{2}|CD|+\sqrt{2}|CD|+3|CD|}{2}\\&=\frac{3\sqrt{2}+3}{2}|CD|=\frac{3(\sqrt{2}+1)}{2}|CD|.\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}P_{\triangle ABD}&=P_{\triangle ABC}-P_{\triangle BCD}\\&=\frac{|AC|\cdot|BC|}{2}\sin\gamma-\frac{|CD|\cdot|BC|}{2}\sin\gamma\\&=\frac{|BC|}{2}(|AC|-|CD|)\sin\gamma\end{aligned}$$

$$= \frac{2|CD|}{2} \cdot 3|CD| \sin\gamma$$
$$= \frac{3\sqrt{7}}{4}|CD|^2.$$

Dobivamo

$$r = \frac{P_{\triangle ABD}}{s} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{4}|CD|^2}{\frac{3}{2}|CD|(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{7}|CD|}{2(\sqrt{2}+1)}$$

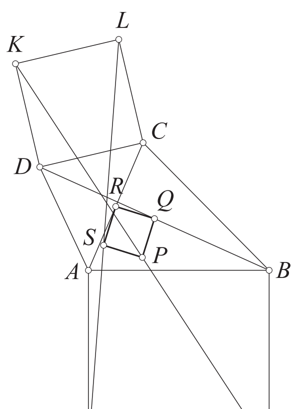
i konačno

$$\frac{R}{r} = \frac{8}{7}(2+\sqrt{2}).$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3463. *Kvadrati ABMN i CDKL su konstruirani s vanjske strane nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ konveksnog četverokuta ABCD. Dokaži da su polovišta dijagonala četverokuta ABCD i MNKL vrhovi kvadrata ili se međusobno podudaraju.*

Rješenje. Točkama su pridruženi kompleksni brojevi: z_A, z_B, z_C, z_D. Tada su polovišta dijagonala četverokuta $ABCD$ i $MNKL$: $z_Q = \frac{z_B + z_D}{2}$, $z_R = \frac{z_A + z_C}{2}$, $z_P = \frac{z_M + z_K}{2}$, $z_S = \frac{z_N + z_L}{2}$.



Točkama M, K, N, L pripadaju kompleksni brojevi

$$z_M = z_B + (z_A - z_B)e^{\frac{i\pi}{2}} = z_B + i(z_A - z_B)$$
$$z_K = z_D + (z_C - z_D)i$$
$$z_N = z_A + (z_D - z_A)\cdot(-i) = z_A - i(z_B - z_A)$$
$$z_L = z_C + (z_D - z_C)\cdot(-i) = z_C - i(z_D - z_C).$$

Polovišta dijagonala četverokuta $MNKL$ su:

$$z_S = \frac{z_N+z_L}{2} = \frac{z_A+z_C}{2} - i\cdot\frac{z_B-z_A+z_D-z_C}{2}$$
$$z_P = \frac{z_M+z_K}{2} = \frac{z_B+z_D}{2} + i\cdot\frac{z_A-z_B+z_C-z_D}{2}$$
$$z_{SP} = z_P - z_S = \frac{z_B+z_D-z_A-z_C}{2}$$
$$z_{SR} = z_R - z_S = i\cdot\frac{z_B-z_A+z_D-z_C}{2} = iz_{SP}$$
$$z_{PQ} = z_Q - z_P = -i\cdot\frac{z_A-z_B+z_C-z_D}{2} = z_{SR}$$

što znači da je četverokut $PQSR$ kvadrat ili jedna točka.

Ur.

3464. *Izračunaj vrijednost izraza (bez kalkulatora)*

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ.$$

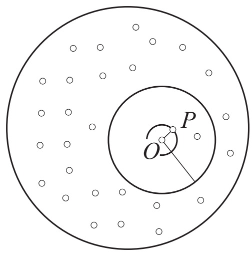
Rješenje.

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$$
$$= \frac{1 - 4\sin 70^\circ \sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{1 - 4\cdot\left[-\frac{1}{2}(\cos 80^\circ - \cos 60^\circ)\right]}{2\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{1 + 2\left(\cos 80^\circ - \frac{1}{2}\right)}{2\sin 10^\circ} = \frac{1 - 1 + 2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ} = 1.$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3465. *Unutar kruga radijusa 16 cm nalazi se 650 točaka. Dokaži da postoji prsten s unutarnjim radijusom 2 cm i vanjskim 3 cm koji pokriva barem 10 od tih točaka.*

Rješenje. Uočimo prvo da točka P pripada kružnom prstenu sa središtem u točki O ako i samo ako točka O pripada sukladnom kružnom prstenu sa središtem u točki P. Prema tome dovoljno je dokazati sljedeću činjenicu: promotrimo li sve kružne prstenove s polumjerima duljina 2 cm i 3 cm, sa središtima u danih 650 točaka, tada postoji barem jedna točka koja leži u barem 10 kružnih prstenova.



Budući da je duljina vanjskog polumjera svakog prstena jednaka 3 cm, zaključujemo da se svi takvi kružni prstenovi nalaze unutar kruga polumjera $r = 16 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 19 \text{ cm}$. Površina tog kruga je

$$P = 19^2\pi = 361\pi \text{ cm}^2.$$

Površina kružnog prstena je

$$(3^2 - 2^2)\pi = 5\pi \text{ cm}^2,$$

pa je zbroj površina svih kružnih prstenova jednak

$$650 \cdot 5\pi \text{ cm}^2 = 3250\pi \text{ cm}^2.$$

Budući da je $3250\pi > 3240\pi = 9 \cdot 361\pi$ tj. $3250\pi \text{ cm}^2 > 9P$, postoji točka koja leži u barem 10 kružnih prstenova. Dakle, kružni prsten sa središtem u toj točki te s polumjerima duljina 2 cm i 3 cm, sadrži barem 10 od danih 650 točaka.

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3466. *Dana je kružnica $k(O_1, R)$ i pravac p koji ju ne siječe i od njezinog središta udaljen je d. Odredi geometrijsko mjesto središta kružnica koje dodiruju danu kružnicu i pravac p.*

Rješenje. Označimo kružnice i njihova središta sa $k_1(O_1, d)$, $O_1(O, d)$, $d > R$, $k_2(O_2, r_0)$, $O_2(O, r_0)$, $k_3(O_3, r)$, $O_3(x, r) = O_3(x, y)$. Tada je

$$x^2 + (d - r)^2 = (R + r)^2$$

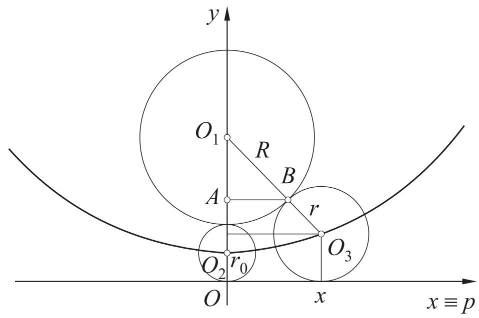
$$R + 2r_0 = d$$

$$r = y;$$

$$x^2 + d^2 - 2yd + y^2 = R^2 + 2Ry + y^2$$

$$x^2 + d^2 - R^2 = 2(R + d)y$$

$$y = \frac{1}{2(R + d)}x^2 + \frac{d - R}{2}. \qquad (1)$$



Traženo geometrijsko mjesto točaka je parabola (1).

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3467. *Nađi rješenje sistema linearnih kongruencija*

$$x + 2y \equiv 1 \pmod 5$$

$$2x + y \equiv 1 \pmod 5.$$

Rješenje. Množenjem druge jednadžbe s 2 dobivamo

$$x + 2y \equiv 1 \pmod 5$$

$$4x + 2y \equiv 2 \pmod 5.$$

Oduzimanjem prve kongruencije od druge imamo

$$3x \equiv 1 \pmod 5.$$

Množenjem ove jednakosti s 2 dobivamo

$$6x \equiv 2 \pmod 5 \quad \text{ili} \quad x \equiv 2 \pmod 5.$$

Množenjem prve kongruencije s 2 imamo

$$2x + 4y \equiv 2 \pmod 5$$

$$2x + y \equiv 1 \pmod 5,$$

a odavde oduzimanjem druge kongruencije od prve,

$$3y \equiv 1 \pmod 5$$

ili

$$6y \equiv 2 \pmod 5 \quad \text{tj.} \quad y \equiv 2 \pmod 5.$$

Dakle, rješenje je

$$x \equiv 2 \pmod 5, \quad y \equiv 2 \pmod 5.$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3468. *Neka je F_n Fibonaccijev niz ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ za $n > 1$). Odredi sume*

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$.

Rješenje. Koristeći rekurzivnu formulu za Fibonaccijev niz dobivamo:

a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{F_{n+1}} \right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_N} - \frac{1}{F_{N+1}} \right)$$
$$= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = 2.$$

b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_nF_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{F_{n-1}F_nF_{n+1}}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} \right)$$
$$= \sum_{N\to\infty} \left(\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_NF_{N+1}} \right) = \frac{1}{F_1F_2} = 1.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 386. *Minutna kazaljka na Big Benu je dugačka 4.3 m, a satna 2.7 m. Kolika je brzina krajnje točke minutne kazaljke i koliko je puta ona veća od brzine krajnje točke satne kazaljke?*

Rješenje.

$r_1 = 4.3$ m

$r_2 = 2.7$ m

$t_1 = 1$ h

$\underline{t_2 = 12 \text{ h}}$

$v_1 =?$ $\quad \dfrac{v_1}{v_2} =?$

$s_1 = 2r_1\pi = 2 \cdot 4.3 \text{ m} \cdot \pi = 27.018 \text{ m};$

$v_1 = \dfrac{s_1}{t_1}v_1 = \dfrac{27.018 \text{ m}}{1 \text{ h}} = 27.018 \text{ m/h};$

$s_2 = 2r_2\pi = 2 \cdot 2.7 \text{ m} \cdot \pi = 16.965 \text{ m};$

$v_2 = \dfrac{s_2}{t_2} = \dfrac{16.414 \text{ m}}{12 \text{ h}} = 1.414 \text{ m/h};$

$\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{27.018 \text{ m/h}}{1.414 \text{ m/h}} = 19.1.$

Ante Šego (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 387. *Arhimedov zakon kaže da je tijelo uronjeno u tekućinu lakše za težinu istisnute tekućine. Izračunaj ubrzanje koje ima kamen mase 10 kilograma dok tone u vodi. Gustoća kamena je 2500 kg/m^3, a gustoća vode je 1000 kg/m^3.*

Rješenje.

$m = 10$ kg

$\rho_k = 2500 \text{ kg/m}^3$

$\underline{\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3}$

$a =?$

$F = G - G_v = m_kg - m_vg = m_kg - V_v\rho g;$

$V_v = V_k = \dfrac{m}{\rho}$

$V_k = \dfrac{10 \text{ kg}}{2500 \text{ kg/m}^3} = 0.004 \text{ m}^3;$

$F = 10 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg}$

$\quad - 0.004 \text{ m}^3 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg}$

$\quad = 100 \text{ N} - 40 \text{ N} = 60 \text{ N};$

$a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{60 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 6 \text{ m/s}^2.$

Ante Šego (8), Zagreb

OŠ – 388. *Automobil mase 1.2 tone može jednoliko ubrzati iz mirovanja do brzine 90 km/h za 6 sekundi. Kolika mu je snaga?*

Rješenje.

$m = 1.2 \text{ t} = 1200 \text{ kg}$

$v_1 = 0$

$v_2 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$

$\underline{t = 6 \text{ s}}$

$P = ?$

$P = \dfrac{W}{t}$

$W = F \cdot s$

$s = \dfrac{at^2}{2},$

$F = a \cdot m$

$a = \dfrac{\Delta v}{t} = \dfrac{25\ \mathrm{m/s}}{6\ \mathrm{s}} = \dfrac{25}{6}\ \mathrm{m/s^2},$

$s = 75\ \mathrm{m}$

$F = 1200\ \mathrm{kg} \cdot \dfrac{25}{6}\ \mathrm{m/s^2} = 5000\ \mathrm{N}$

$W = 5000\ \mathrm{N} \cdot 75\ \mathrm{m} = 375\,000\ \mathrm{J}$

$P = \dfrac{375\,000\ \mathrm{J}}{6\ \mathrm{s}} = 62\,500\ \mathrm{W}.$

Ante Šego (8), Zagreb

OŠ – 389. *Promatrač u čamcu na rijeci je uočio da valovi koji ljuljaju njegov čamac imaju razmak između susjednih valnih brjegova 60 centimetara. Izmjerio je da za četiri sekunde pored njega prođe 8 valova. Kolika je brzina tih valova? Vraćajući se na obalu uočio je da su se razmaci između brjegova smanjili na 40 centimetara. Kolika je brzina valova u plićem dijelu vode?*

Rješenje.

$\lambda_1 = 60\ \mathrm{cm}$

$t = 4\ \mathrm{s}$

$n = 8$

$\underline{\lambda_2 = 40\ \mathrm{cm}}$

$v_1,\ v_2 = ?$

$v = \lambda \cdot f$

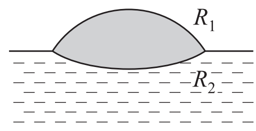
$f = \dfrac{n}{t} = \dfrac{8}{4\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{Hz}$

$v_1 = 0.6\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{Hz} = 1.2\ \mathrm{m/s}$

$v_2 = \lambda_2 \cdot f = 0.4\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{Hz} = 0.8\ \mathrm{m/s}.$

Ur.

1581. *Na površini mirne vode pliva bikonveksna plastična leća kao na slici. Paralelni snop zraka okomito odozgo leća će fokusirati na dubini 30 cm. Kad bi leća bila u zraku, njena bi žarišna daljina bila 12 cm. Odredi radijuse zakrivljenosti oba dioptra. Indeks loma plastike od koje je načinjena leća je 1.46, indeks loma vode $\frac{4}{3}$, a indeks loma zraka uzmimo da je jednak 1.*



Rješenje. Žarišna daljina leće u zraku dana je izrazom

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2},$$

što daje (u centimetrima)

$$\frac{1}{12} = \frac{0.46}{R_1} + \frac{0.46}{R_2}.$$

Na površini vode, donji je dioptar (R_2) u vodi, pa imamo

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{\frac{n}{n_v-1}}{R_2},$$

$$\frac{1}{30} = \frac{0.46}{R_1} + \frac{0.095}{R_2}.$$

Oduzimanjem dvaju izraza slijedi

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{0.365}{R_2},$$

$$R_2 = 7.3\ \mathrm{cm}.$$

Uvršteno u prvu jednadžbu za R_1 dobivamo

$$R_1 = \frac{10\,074}{445} = 22.638\ \mathrm{cm}.$$

Ur.

1582. *Jednoliki tanki štap duljine l obješen je na jedan kraj tako da drugi kraj slobodno njiše (fizičko njihalo). Na kojoj bi ga udaljenosti od središta štapa trebali objesiti tako da period malih njihaja ostane toliki koliki je bio za štap obješen na jednom kraju?*

Rješenje. Period njihanja fizičkog njihala određen je izrazom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

gdje je m masa njihala, d udaljenost objesišta i težišta i I moment tromosti oko objesišta. Za štap učvršćen na kraju $d_1 = l/2$ i $I_1 = ml^2/3$, a općenitije za objesište udaljeno d_2 od središta

$I_2 = ml^2/12 + md_2^2$ (poučak o paralelnim osima). Uvjet jednakih perioda daje:

$$\frac{I_1}{mgd_1} = \frac{I_2}{mgd_2}$$
$$I_1 d_2 = I_2 d_1$$
$$\frac{ml^2}{3} d_2 = \left(\frac{ml^2}{12} + md_2^2\right) \cdot \frac{l}{2}.$$

Množenje s 12/ ml daje

$$4ld_2 = \frac{l^2}{2} + 6d_2^2.$$

Rješavanje kvadratne jednadžbe po d_2 daje

$$d_2 = \frac{4l \pm \sqrt{16l^2 - 12l^2}}{12} = \frac{4l \pm 2l}{12},$$

što daje očekivano rješenje $d_2 = d_1 = l/2$ i traženo (netrivijalno) rješenje $d_2 = l/6$.

Ur.

1583. *Zavojnica ohmskog otpora* $10\ \Omega$ *troši snagu 400 W priključena na izmjenični napon 110 V frekvencije 50 Hz. Kolika će biti snaga ako uz isti napon udvostručimo frekvenciju? Koliki je induktivitet zavojnice?*

Rješenje. Snaga je dana izrazom

$$P = UI\cos(\phi) = \frac{U^2 R}{R^2 + L^2\omega^2},$$

gdje je ϕ fazni kut struje i napona, L induktivitet zavojnice, a $\omega = 2\pi f$ kružna frekvencija. Uvrštavanjem $P = 400$ W, $U = 110$ V i $R = 10\ \Omega$ dobivamo $L^2\omega^2 = 202.5$, što daje ($\omega = 2\pi \cdot 50$) induktivitet $L = 0.0453$ H. Stavljanjem $\omega = 2\pi \cdot 100$ u istu jednadžbu dobivamo snagu pri 100 Hz:

$$P = 132.97\ \text{W}.$$

Ur.

1584. *Odredi radijus i brzinu kruženja satelita oko Jupitera kojemu je ophodno vrijeme jednako periodu rotacije Jupitera ("geostacionarna" orbita). Masa Jupitera je* $1.8986 \cdot 10^{27}$ *kg, a period rotacije 9 h 55 min 30 s.*

Rješenje. Masu Jupitera označimo s M, ophodno vrijeme s T, radijus kruženja s R. Brzina jednolikog kruženja je

$$v = \omega R = \frac{2R\pi}{T}.$$

Uvjet kruženja je jednakost gravitacijskog i centripetalnog ubrzanja:

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R}.$$

Iz obje jednadžbe slijedi (treći Keplerov zakon):

$$R^3 = \frac{GM}{4\pi^2} \cdot T^2.$$

Uvrstimo M i $T = 35\,730$ s,

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} \cdot T^2} = 1.6 \cdot 10^8\ \text{m}.$$

Iz prve jednadžbe dobijemo brzinu

$$v = 28\,140\ \text{m/s}.$$

Dženana Šabović (3)
Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo

1585. *Potpuna pomrčina Sunca dogodit će se u Zagrebu 3. rujna 2081. godine. U trenutku maksimalne pomrčine, prividni promjer Sunca će biti* 0.5284°*, a Mjeseca* 0.5664°*. Uzmimo da je relativna kutna brzina Mjeseca u odnosu na Sunce 360 stupnjeva u 29.5 dana (sinodni period). Koristeći navedene kutne veličine, procijeni vrijeme trajanja potpune pomrčine, te ukupno trajanje pomrčine.*

Rješenje. Na centralnoj liniji pomrčine, Mjesečev disk prelazi preko Sunca slijedom na slici. Ako relativnu kutnu brzinu Mjeseca u odnosu na Sunce (oboje se pomiču!) procijenimo pomoću sinodnog perioda, ona iznosi

$$\omega_r = \frac{360^\circ}{29.5\ \text{d}} = 0.50847^\circ \quad \text{na sat.}$$

Trajanje potpune pomrčine je između trenutaka 2 i 3 na slici, što odgovara prevaljenom kutu od

$$\phi_1 = \phi_M - \phi_S = 0.5664^\circ - 0.5284^\circ = 0.038^\circ.$$

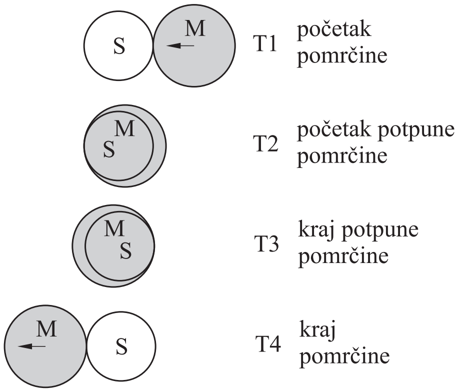
Koristeći ω_r to preračunamo u trajanje:

$$\delta t_1 = \frac{0.038}{0.50847} = 0.07473\ \text{sati} = 4\ \text{min}\ 29\ \text{s}.$$

Ukupno je trajanje pomrčine između trenutaka 1 i 4 na slici, uz prevaljeni kut od

$$\phi_2 = \phi_M + \phi_S = 0.5664^\circ + 0.5284^\circ = 1.0948^\circ$$

$$\delta t_2 = \frac{1.0948}{0.50847} = 2.1531 \text{ sati} = 2 \text{ h } 9 \text{ min } 11 \text{ s}.$$



Točniji astronomski podaci (Stellarium) daju odgovarajuća vremena za Zagreb (UT+2 sata):

$$T_1 = 8:42:14$$
$$T_2 = 9:45:43$$
$$T_3 = 9:49:59$$
$$T_4 = 10:57:32.$$

Vidimo da se računski podaci približno poklapaju s astronomskim, netočnosti računa potječu od rotacije Zemlje oko svoje osi (mijenjamo mjesto promatranja i dok stojimo na mjestu!) i nejednolikih brzina Sunca i Mjeseca na nebu. Također, Zagreb nije točno na centralnoj liniji pomrčine, ali je vrlo blizu (ukucati u tražilicu *solar eclipse 2081*).

Ur.

1586. *Prolaskom kroz morsku vodu, sunčeva svjetlost gubi na intenzitetu. Neka plava (480 nm) svjetlost po metru dubine izgubi 1.75%, a žuta (580 nm) 8.8% intenziteta. Odredi dubinu mora do koje dopire 1% žute svjetlosti, te dubinu do koje dopire 1% plave svjetlosti.*

Rješenje. Intenzitet se mijenja eksponencijalno pa na dubini d iznosi

$$I(d) = I_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^d,$$

gdje je I_0 intenzitet na površini, p postotak apsorpcije po metru i d dubina u metrima. Uvrštavanje $d = 1$ m daje $I/I_0 = 1 - p/100$, kako je zadano, a traženu dubinu dobijemo uvrštavanjem $I/I_0 = 0.01$ i rješavanjem po d:

$$0.01 = \left(\frac{1-p}{100}\right)^d.$$

Izraz u zagradi iznosi 0.9825 za plavu i 0.912 za žutu svjetlost. Dobivamo

$$0.01 = 0.9825^d \rightarrow d = 261 \text{ m (plavo)},$$
$$0.01 = 0.912^d \rightarrow d = 50 \text{ m (žuto)}.$$

Ur.

1587. *Kolika mora biti masa kuglice koja pri centralnom elastičnom sudaru s dotad mirnom kuglicom mase 250 g izgubi 70.84% kinetičke energije?*

Rješenje. Uvedimo oznake E_1, E_1' i E_2' za energiju prve kuglice prije sudara, te energiju prve i druge kuglice poslije sudara. Nadalje, m_1 i m_2 su mase prve i druge kuglice, v_1 brzina prije sudara $(v_2 = 0)$ i v_1' i v_2' brzine poslije sudara. Prva kuglica izgubi 70.84% energije, a sudar je elastičan, pa joj ostane 29.16%, to jest,

$$E_1' = 0.2916 E_1$$
$$v_1'^2 = 0.2916 v_1^2$$
$$v_1' = \pm 0.54 v_1.$$

Za centralni elastični sudar očuvanje energije i impulsa daje:

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$
$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

Izrazimo lijevo član s drugom kuglicom:

$$m_2 v_2'^2 = m_1 (v_1^2 - v_1'^2)$$
$$m_2 v_2' = m_1 (v_1 - v_1').$$

Dijeljenjem gornje jednadžbe donjom dobijemo

$$v_2' = v_1 + v_1'.$$

Za pozitivan predznak $v_1' = 0.54 v_1$ imamo $v_2' = 1.54 v_1$, pa je $m_2 \cdot 1.54 v_1 = m_1 \cdot 0.46 v_1$. Odatle je (uz $m_2 = 250$ g)

$$m_1 = m_2 \cdot \frac{1.54}{0.46} = 837 \text{ g}.$$

Za negativan predznak $v_1' = -0.54 v_1$ imamo $v_2' = 0.46 v_1$, pa je $m_2 \cdot 0.46 v_1 = m_1 \cdot 1.54 v_1$ i

$$m_1 = m_2 \cdot \frac{0.46}{1.54} = 74.68 \text{ g}.$$

Dženana Šabović (3), Sarajevo