Matematičke igre na šahovskoj ploči

Vjekoslav Kovač[1], *Iva Madjerčić*[2]

Šah je jedna od najstarijih i najpoznatijih strateških igara i ima zanimljivu povijest [8]. Smatra se kako se razvio iz stare indijske igre *čaturanga*, a njegova prva varijanta s 32 standardne figure na 8×8 ploči bio je igra *šatrandž*, dokumentirana u Perziji u 7. stoljeću. Pravila šaha su se bitno mijenjala do 19. stoljeća, a danas su posve određena i propisana od strane Svjetske šahovske federacije. Ipak, ovo nije članak o šahu, nego o logičkim igrama koje se mogu igrati s istim rekvizitima, tj. pločom i figurama, ali se daju potpuno matematički analizirati.

Kombinatorna teorija igara je matematička disciplina koja se bavi strateškim igrama bez elemenata slučajnosti. Kaže se da je neka konkretna igra *potpuno riješena* ako su za svaku njenu poziciju poznate "optimalne" strategije za svakog od igrača. Premda računala već načelno igraju šah uspješnije od velemajstora, sama igra je još daleko od riješene. Vrhunski šahovski teoretičari čak ne mogu složiti svoja mišljenja oko toga ima li "bijeli igrač" dovoljnu prednost kako bi mogao pobijediti, ili pak savršena igra nužno vodi neriješenom ishodu. Ni superbrza računala današnjice ne mogu odgovoriti na to pitanje, naprosto zbog složenosti pravila igre i astronomskog broja mogućih kombinacija.

Mi ćemo prezentirati nekoliko jednostavnijih logičkih igara, koje ćemo znati riješiti, a za njih ćemo i detaljno opisati pobjedničke strategije. Odabrali smo primjere kod kojih je matematička analiza igre superiorna s obzirom na zdravorazumsko rasuđivanje. Drugim riječima, ako čitatelj zna provesti potpunu analizu ovih i sličnih problema, onda je u neizmjernoj prednosti u odnosu na prijatelja koji je "samo" iznimno bistar i vješt igrač logičkih igara.

Sve igre koje ćemo proučiti u ovom radu su tzv. *nepristrane igre* (eng. *impartial games*) za dva igrača. To znači da igrači igraju istim raspoloživim figurama, a skup mogućih poteza ovisi samo o trenutnoj poziciji, no ne i o činjenici koji igrač je na potezu. Primijetimo da šah ne zadovoljava ovu definiciju pa neće potpasti pod izloženu teoriju. Naime, pravila šaha nisu jednaka za oba igrača: jedan igra bijelim, drugi crnim figurama. Nama boje figura neće biti važne: igrači se naprosto izmjenjuju na potezu i igraju nekom od dozvoljenih figura na neki od dopuštenih načina.

Da bi igra bila dobro postavljena, pravila moraju osigurati da ona uvijek završi u konačno mnogo poteza. Uvažit ćemo standardni dogovor da uvijek gubi igrač koji više ne može odigrati potez, tj. pobjeđuje igrač koji je posljednji igrao. *Potpuno analizirati* nepristranu igru znači za svaku moguću poziciju ispitati za kojeg od igrača je ona dobitna, čime skup pozicija dijelimo u sljedeće dvije klase.

- *Pozicije tipa N* (ili *N-pozicije*) su one koje su dobitne za igrača koji je na potezu. Oznaka *N* dolazi iz engleske riječi *next* i simbolizira povoljnost pozicije za igrača koji će odigrati idući potez.

[1] Autor je docent na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: `vjekovac@math.hr`

[2] Autorica je studentica na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: `iva.madjercic@gmail.com`

- *Pozicije tipa P* (ili *P-pozicije*) su one koje su gubitne za igrača koji je na potezu. Oznaka P dolazi iz engleske riječi *previous* i sugerira povoljnost pozicije za igrača koji je odigrao *prethodni* potez, osim ukoliko ta pozicija nije baš početna pozicija igre.

Pretpostavlja se da igrači uvijek igraju optimalno, tj. ne čine pogreške. Ove definicije su dobre jer zbog konačnosti igre točno jedan od igrača mora imati strategiju za pobjedu. Sasvim je druga stvar što ta strategija ne mora uopće biti evidentna.

Postavlja se pitanje kako klasificirati pozicije u danoj igri. Tvrdimo da je to moguće učiniti sljedećim rekurzivnim postupkom. Za svaku poziciju p označimo sa $S(p)$ skup svih pozicija u koje igra može doći iz p nakon jednog odigranog poteza. Algoritam je sljedeći.

- Označimo sve završne pozicije igre oznakom P.
- Promotrimo neku poziciju p koja još nije označena, ali su označene sve pozicije iz $S(p)$.
  - Ukoliko neka pozicija iz $S(p)$ ima oznaku P, tada poziciji p pripišemo oznaku N.
  - Ukoliko sve pozicije iz $S(p)$ imaju oznaku N, tada poziciji p pripišemo oznaku P.
- Ponavljajmo postupak dok ne označimo početnu poziciju igre.

Teorem 1. *Izloženi algoritam ispravno klasificira pozicije. Drugim riječima, pozicije s oznakom N su doista tipa N, a pozicije s oznakom P su doista tipa P.*

Dokaz. Struktura dokaza da je svaka pozicija ispravno označena je također rekurzivna. Svaka završna pozicija znači poraz za igrača koji je na potezu pa ona doista treba dobiti oznaku P. Uzmimo neku poziciju p i pretpostavimo da su sve pozicije iz $S(p)$ ispravno označene.

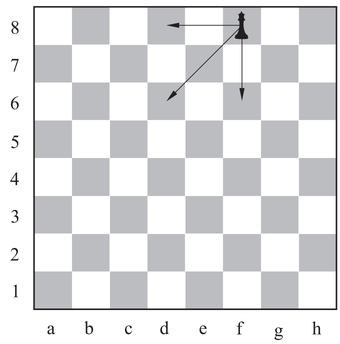
Ako neka od $q \in S(p)$ ima oznaku P, tada igrač koji je na potezu kod pozicije p naprosto treba odigrati potez koji igru prevodi u poziciju q. To mu po pretpostavci garantira pobjedu pa zaključujemo da je pozicija p dobitna za igrača koji je na potezu, tj. ona je N pozicija.

Ako sve pozicije iz $S(p)$ imaju oznaku N, tada igrač koji je na potezu kod pozicije p u suštini nema izbora. Bilo kojim svojim potezom će prevesti igru u N poziciju, koja je pak po definiciji gubitna upravo za igrača koji je odigrao taj potez. Dakle, p je doista P pozicija. $\square$

Pretpostavimo da je neka konkretna igra već potpuno proučena, u smislu da su pozicije klasificirane na gornji način. Pobjednik je određen tipom početne pozicije igre: Pobjeđuje prvi igrač ukoliko je ona tipa N, a drugi igrač ako je početna pozicija tipa P. Štoviše, gornji algoritam i njegov dokaz opisuju pobjedničku strategiju: *Igrač koji se zatekne u poziciji tipa N naprosto treba povući neki potez koji igru prevodi u poziciju tipa P.* Nakon toga će njegov protivnik morati odigrati neki potez koji igru opet stavlja u N poziciju i postupak se ponavlja dok igra ne završi u nekoj P poziciji, a njegov protivnik više ne može odigrati potez.

Ilustrirajmo sada ovu općenitu teoriju na jednom primjeru.

Primjer 1. (Damina igra.) Na početku igre na šahovskoj ploči se nalazi jedino dama, i to na polju f8, kao na slici 1. U jednom potezu je moguće damu pomaknuti za bilo koji broj polja, ali samo u smjerovima: lijevo, dolje i ukoso lijevo-dolje. Izgubi igrač koji više ne može odigrati potez, tj. kada se dama nađe na polju a1. Koji igrač ima strategiju za pobjedu? Ukoliko pobjeđuje prvi igrač, opišite neki njegov dobitni početni potez.

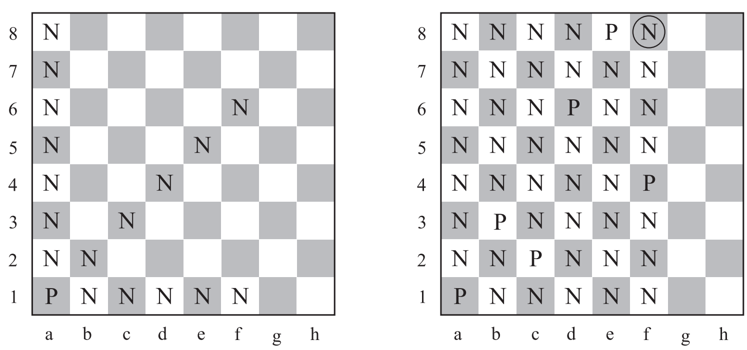


Slika 1. Damina igra.

Igru je navodno smislio matematičar R. P. Isaacs, premda je njena ekvivalentna formulacija već bila poznata u staroj Kini. Tamo se igrala pomoću dvije hrpe kamenčića, koje su zapravo određivale horizontalnu i vertikalnu poziciju dame na ploči. Analizirao ju je matematičar W. A. Wythoff, u čiju čast se ponekad naziva i *Wythoffova igra*.

Pozicija u ovoj igri je naprosto određena poljem na kojem se trenutno nalazi dama. Zato je praktično upisivati oznake *N* i *P* u sama polja šahovske ploče i to činimo po navedenom algoritmu. Stupci *g* i *h* nam nisu važni, jer dama ionako ne može stići na neko od tih polja, pa ih ostavljamo praznima.

Jedino polje *a1* odgovara nekoj završnoj poziciji pa ono dobiva oznaku *P*. Označavanje ćemo ubrzati ako odmah primijetimo da se iz svih preostalih polja u retku *1*, stupcu *a* i na dijagonali dama može pomaknuti u *a1* pa sva ta polja moraju dobiti oznaku *N*; pogledajte lijevu ploču na slici 2. Promotrimo sada npr. polje *c2*. Iz njega dama može doći samo u *N* poziciju pa ono dobiva oznaku *P*. To pak uzrokuje da sva preostala polja u retku *2* i stupcu *c* te polja *d3*, *e4*, *f5* budu označena s *N*. Nastavljamo rasuđivati na taj način dok ne popunimo stupce *a-f* kao na desnoj ploči na slici 2.

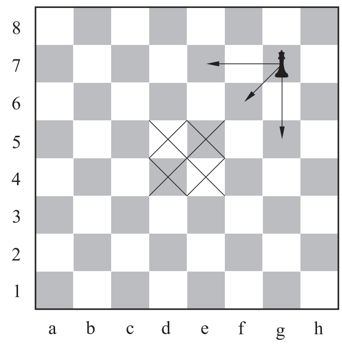


Slika 2. N i P pozicije za daminu igru.

Konačno treba uočiti da polazno damino polje odgovara *N* poziciji pa će uz idealnu igru pobijediti prvi igrač. On naprosto treba pomaknuti damu s *f8* na neku od dostupnih *P* pozicija, tj. na neko od polja *f4*, *d6* ili *e8*.

Damina igra se može odigrati protiv računala na web stranici [5]. Zainteresirani čitatelj može pročitati o njenim poopćenjima u članku [1] i u knjizi [2]. Kao korisnu vježbu ostavljamo i zadatak koji obrađuje malu varijaciju damine igre. Kratka rješenja zadataka za vježbu su dana na kraju ovog teksta.

Zadatak 1. (Varijanta damine igre.) Dama se nalazi na polju g7 šahovske ploče i kreće se kao u prethodnom primjeru. Ovog puta su četiri središnja polja isključena iz mogućih pozicija, npr. okupirana su nekim figurama koje ne sudjeluju u igri; pogledajte sliku 3. Koji igrač ima strategiju za pobjedu?



Slika 3. Varijanta damine igre.

Profinjenje pojma N i P pozicija čine tzv. *Sprague-Grundyjevi brojevi*, koje ćemo još kraće zvati *S-G brojevima*. Do njih su nezavisno došli R. P. Sprague [9] i P. M. Grundy [6]. Prisjetimo se da za poziciju p skup $S(p)$ sačinjavaju sve pozicije u koje se iz p može doći jednim potezom. Rekurzivno definiramo nenegativne cijele brojeve $g(p)$.

- Za svaku završnu poziciju p stavimo $g(p) = 0$.
- Promotrimo neku poziciju p za koju $g(p)$ još nije definiran, ali su definirani svi brojevi $g(q)$, $q \in S(p)$. Potom stavimo da $g(p)$ bude najmanji nenegativni cijeli broj koji nije jednak niti jednom od brojeva $g(q)$, $q \in S(p)$. Simbolički,
$$g(p) := \min\Big(\mathbf{N}_0 \setminus \big\{g(q) : q \in S(p)\big\}\Big).$$
- Ponavljajmo postupak dok ne definiramo S-G broj za početnu poziciju igre.

Lako je provjeriti sljedeću činjenicu: *Pozicija p je tipa P ako i samo ako vrijedi* $g(p) = 0$. Dokaz te tvrdnje je gotovo identičan dokazu teorema 1 pa ga izostavljamo. U tom smislu S-G brojevi doista poopćuju N i P tipove pozicija.

Važnost Sprague-Grundyjevih brojeva ne leži u proučavanju jedne zasebne igre, već zbroja nezavisnih nepristranih igara. Pretpostavimo da naši igrači istovremeno imaju na raspolaganju dvije igre G_1 i G_2, koje se mogu igrati svaka za sebe. *Zbroj igara* G_1 i G_2 je nova igra $G_1 \oplus G_2$ kod koje odigrati potez znači odigrati dozvoljeni potez u igri G_1 ili odigrati dozvoljeni potez u igri G_2. Drugim riječima, igrač koji je na redu može sam odabrati u kojoj od igara želi povući potez. Opet se podrazumijeva da gubi igrač kojem više ne preostaje dozvoljenih poteza, niti u igri G_1 niti u igri G_2. Prirodno je pozicije u $G_1 \oplus G_2$ identificirati s uređenim parovima (p_1, p_2), sastavljenim od pozicije p_1 iz igre G_1 i pozicije p_2 iz igre G_2.

Želimo analizu zbroja dviju igara svesti na analizu svake od igara zasebno. Prirodno je zapitati se može li se opisati N i P pozicije u $G_1 \oplus G_2$ pomoću N i P pozicija u igrama G_1 i G_2. Nažalost, odgovor je negativan, ali igra $G_1 \oplus G_2$ se ipak može potpuno analizirati ako znamo S-G brojeve za G_1 i G_2.

Teorem 2. *Označimo s* g_1 *i* g_2 *funkcije koje daju S-G brojeve pozicija redom u igrama* G_1 *i* G_2. *Pozicija* (p_1, p_2) *u igri* $G_1 \oplus G_2$ *je tipa P ako i samo ako vrijedi* $g_1(p_1) = g_2(p_2)$.

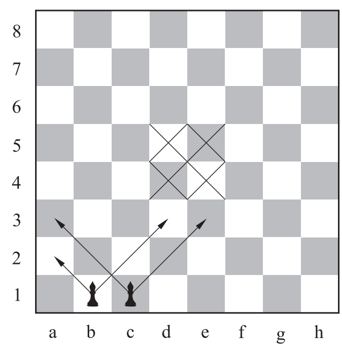
Dokaz. Opet koristimo rekurzivne definicije. Završne pozicije (p_1, p_2) u $G_1 \oplus G_2$ su svakako tipa P i za njih je $g_1(p_1) = 0 = g_2(p_2)$. Uzimo neku poziciju (p_1, p_2) i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve pozicije u koje se iz nje može doći jednim potezom, a to su upravo pozicije oblika (q_1, p_2) za $q_1 \in S(p_1)$ i pozicije oblika (p_1, q_2) za $q_2 \in S(p_2)$.

Pretpostavimo najprije da za poziciju (p_1, p_2) vrijedi $g_1(p_1) = g_2(p_2)$. Ako naredni igrač odluči povući potez koji je dozvoljen u igri G_1 i doći u poziciju (q_1, p_2), $q_1 \in S(p_1)$, tada će po konstrukciji funkcije g_1 vrijediti $g_1(q_1) \neq g_1(p_1)$, odakle je $g_1(q_1) \neq g_2(p_2)$. Po pretpostavci su sve takve pozicije (q_1, p_2) tipa N, a isto vrijedi i za pozicije (p_1, q_2), $q_2 \in S(p_2)$. Zaključujemo da se iz (p_1, p_2) dolazi jedino u N pozicije pa ona mora biti tipa P, kao što se i tvrdi.

Pretpostavimo sada da za (p_1, p_2) vrijedi $g_1(p_1) \neq g_2(p_2)$ i bez smanjenja općenitosti neka je $g_1(p_1) > g_2(p_2)$. Opet po definiciji S-G brojeva u igri G_1 znamo da za svaki cijeli broj $0 \leq m < g_1(p_1)$ postoji pozicija q_1 u koju se može pomaknuti iz p_1 i za koju vrijedi $g_1(q_1) = m$. Posebno to vrijedi ako uzmemo baš $m = g_2(p_2)$ i na taj način igra $G_1 \oplus G_2$ može prijeći u poziciju (q_1, p_2) za koju je $g_1(q_1) = g_2(p_2)$. Po pretpostavci je to P pozicija. Dakle, iz (p_1, p_2) se može pomaknuti u neku poziciju tipa P pa je ona sama tipa N. □

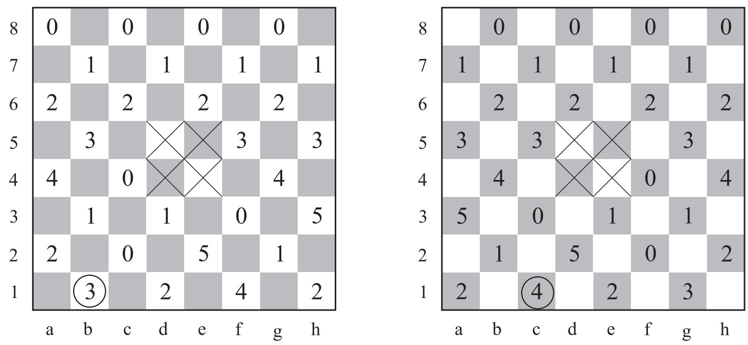
Evo jednog primjera gdje je potrebno izračunati S-G brojeve i primijeniti teorem 2.

Primjer 3. (Igra lovaca.) Na šahovskoj ploči se nalaze dva lovca, u početku na poljima b1 i c1. Oni se mogu pomicati za bilo koji broj polja, ali samo u smjerovima lijevo-gore i desno-gore. Osim toga su im zabranjena četiri središnja polja, kao na slici 4. U jednom potezu igrač pomiče lovca po izboru. Igra završava kada se oba lovca nađu u retku 8. Pokažite da prvi igrač ima pobjedničku strategiju i nađite njegov početni potez koji mu osigurava pobjedu. Što se mijenja ako lovci kreću s polja a1 i d1?



Slika 4. Igra lovaca.

Jedan od lovaca se kreće samo po bijelim, a drugi samo po crnim poljima. Zato su njihova kretanja nezavisna i predstavljaju dvije zasebne igre čiji zbroj želimo proučiti. Prvom od lovaca su završne pozicije polja *a8*, *c8*, *e8*, *g8* i njima trebamo dodijeliti S-G vrijednosti 0. Sada poljima *b7*, *d7*, *f7*, *h7* pridružujemo S-G brojeve 1 jer se iz njih u jednom potezu dolazi upravo u prethodno navedene pozicije. Nadalje, polja *a6*, *c6*, *e6*, *g6* imaju S-G brojeve 2, jer se iz svakog od njih može pomaknuti upravo u pozicije s brojevima 0 i 1, a slično polja *b5*, *f5*, *h5* dobivaju broj 3. Stvari postaju zanimljivije s poljem *c4*. Iz njega se može pomaknuti samo u polja *a6* i *b5*, koja imaju oznake 2 i 3. Kako se među njima ne pojavljuje 0, zaključujemo da polju *c4* treba pripisati broj 0. Ako nadalje promotrimo polje *d3*, onda vidimo da se iz njega dolazi u pozicije s oznakama 0, 2 i 3. Najmanji nenegativni cijeli broj kojeg nema na tom popisu je broj 1 pa polju *d3* odgovara S-G broj 1. Nastavljajući ovaj postupak popunjavamo sva bijela polja šahovske ploče kao na lijevoj polovici slike 5, a potom i crna polja (za drugog lovca) kao na desnoj polovici iste slike.



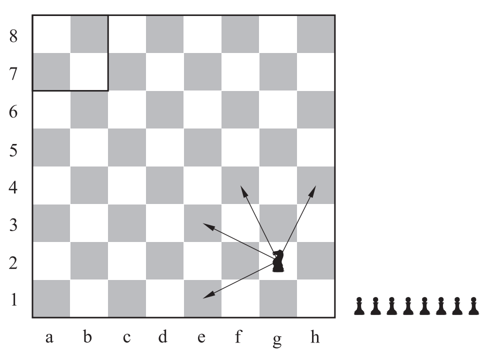
Slika 5. S-G brojevi za igru lovaca.

Polazna polja lovaca imaju S-G brojeve 3 i 4. Po teoremu 2 znamo da je pozicija $(b1, c1)$ tipa *N* pa pobjeđuje prvi igrač. Prvim potezom treba dovesti lovce na polja s istim S-G brojevima, što se može postići jedino tako da se drugi lovac pomakne s *c1* na polje *g5*, koje ima S-G broj 3.

Ako na početku radije stavimo lovce na *a1* i *d1*, tada pobjeđuje drugi igrač. Naime, oba polazna polja imaju broj 2 pa je početna pozicija $(d1, a1)$ tipa *P*, opet prema teoremu 2.

Sljedeći zadatak je preuzet iz [2].

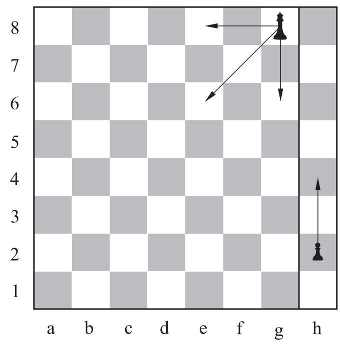
Zadatak 4. (Skakačeva igra.) Skakač je postavljen na polje g2 i dozvoljena su mu samo 4 smjera za skokove, kao na slici 6. Prestaje se kretati kada dođe na neko od polja a7, b7, a8, b8. Pored ploče se nalazi hrpa od 8 neiskorištenih figura. U jednom potezu se ili pomiče skakača ili uzima neki broj figura s hrpe. Kao i obično, gubi igrač koji više ne može igrati. Koji će igrač pobijediti? Ukoliko je to prvi igrač, opišite njegov pobjednički potez.



Slika 6. Skakačeva igra.

Još jedan zadatak će čitatelju dobro doći ako želi uvježbati naučenu analizu.

Zadatak 5. (Igra dame i pijuna.) Dama se nalazi na polju g8 i kreće se kao u primjeru 1. Pijun je postavljen na polje h2 i kreće se kao što je u šahu uobičajeno, osim što više ne sudjeluje u igri kada jednom dođe na polje h8. Potez se sastoji od pomicanja dame ili pijuna. Koji igrač može računati na pobjedu?



Slika 7. Igra dame i pijuna.

Na sličan se način definira zbroj od nekoliko nepristranih igara $G_1, G_2, \ldots, G_n$, ali tada ne vrijedi naivno poopćenje teorema 2, već treba uvesti tzv. *nim zbrajanje*. Zainteresirani čitatelj može naći osnove općenite Sprague-Grundyjeve teorije u vrlo opsežnoj i zabavnoj knjizi [2]. Posebno upućujemo na primjer tzv. *Northcottove igre*, koja je naprosto "šahovska" preformulacija mnogo poznatije igre *Nim*, obrađene naprimjer u člancima [3] i [7]. Može se igrati na web stranici [4].

Rješenja zadataka za vježbu

Rješenje zadatka 2. Na slici 8 su izračunate N i P pozicije. Kako je početna pozicija *g7* tipa P, zaključujemo da pobjeđuje drugi igrač.

8								
7	N	N	N	N	N	N	P	
6	N	N	N	P	N	N	N	
5	N	N	N			N	N	
4	N	N	N			P	N	
3	N	P	N	N	N	N	N	
2	N	N	P	N	N	N	N	
1	P	N	N	N	N	N	N	
	a	b	c	d	e	f	g	h

Slika 8. N i P pozicije za varijantu damine igre.

8	0	0	1	1	0	0	1	1
7	0	0	2	1	0	0	1	1
6	1	2	2	2	3	2	2	2
5	1	1	2	1	4	3	2	3
4	0	0	3	4	0	0	1	1
3	0	0	2	3	0	0	2	1
2	1	1	2	2	1	2	2	2
1	1	1	2	3	1	1	2	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Slika 9. S-G brojevi za skakača u skakačevoj igri.

Rješenje zadatka 4. Standardno se izračunaju S-G brojevi za skakača; pogledajte sliku 9. Što se tiče hrpe figura sa strane, njihov S-G broj je naprosto trenutni broj figura na hrpi. Na početku su S-G brojevi 2 i 8 pa pobjeđuje prvi igrač i to tako da s hrpe uzme točno 6 figura.

Rješenje zadatka 5. S-G brojevi i za damu i za pijuna su prikazani na slici 10. Kako njihove početne vrijednosti nisu jednake, pobjeđuje prvi igrač pomicanjem dame na *d5*.

8	7	8	6	9	0	1	4	0
7	6	7	8	1	9	10	3	1
6	5	3	4	0	6	8	10	0
5	4	5	3	2	7	6	9	1
4	3	4	5	6	2	0	1	0
3	2	0	1	5	3	4	8	1
2	1	2	0	4	5	3	7	2
1	0	1	2	3	4	5	6	
	a	b	c	d	e	f	g	h

Slika 10. S-G brojevi za igru dame i pijuna.

Literatura

[1] E. BEGOVIĆ, V. KOVAČ, *Uloga eksperimenta u matematičkom otkriću*, Poučak **55** (2013), 4–17.

[2] E. R. BERLEKAMP, J. H. CONWAY, R. K. GUY, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, drugo izdanje, A K Peters/ CRC Press, 2001.

[3] M. BOTINČAN, *Kombinatorne igre*, Math.e **6** (2005), `http://e.math.hr/old/igre/index.html`

[4] *Cut The Knot – Northcott's game*, `http://www.cut-the-knot.org/recurrence/Northcott.shtml`

[5] *Cut The Knot – Wythoff's Nim*, `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/withoff.shtml`

[6] P. M. GRUNDY, *Mathematics and games*, Eureka 2 (1939) 6–8.

[7] V. KRČADINAC, J. VUGER, *Dvije igre i njihova generalizacija*, Math.e **10** (2007), `http://e.math.hr/old/dvijeigre/index.html`

[8] H. J. R. MURRAY, *A History of Chess*, Oxford University Press, 1913.

[9] R. P. SPRAGUE, *Über mathematische Kampfspiele*, Tohoku Mathematical Journal **41** (1935), 438–444.