Rješavanje modela tržišne ravnoteže pomoću diferencijalne jednadžbe

Boško Šego[1], *Tihana Škrinjarić*[2]

Uvod

Mnogi ekonomski fenomeni mogu se formulirati kao ekonomsko-matematički model i zatim rješavati adekvatnim matematičkim aparatom. Jedan od mogućih pristupa jest onaj koji se primjenjuje u okviru matematičke ekonomije. Pritom se rješavaju odgovarajuće diferencijalne, odnosno diferencijske jednadžbe, odnosno sustavi tih jednadžbi. Matematička ekonomija kao znanstvena disciplina omogućava ekonomistima dinamičku analizu različitih pojava, čiji je glavni rezultat vremenska putanja. Ona će biti rješenje spomenutih jednadžbi ili sustava jednadžbi, pri čemu se ispituje njezina dinamička stabilnost. Sam pojam vremenske putanje odnosi se na ovisnost razmatranih varijabli o vremenu, a ispitivanje dinamičke stabilnosti odnosi se na utvrđivanje postojanja granične vrijednosti tih varijabli kada vrijeme teži u beskonačnost.

Budući da se ekonomske veličine ne mijenjaju skokovito, često se u ekonomiji koriste diferencijalne jednadžbe. Najprije ćemo definirati temeljne pojmove o diferencijalnim jednadžbama i neke metode za njihovo rješavanje, a potom ćemo, na primjeru modela tržišne ravnoteže kao tipičnom primjeru implementacije diferencijalnih jednadžbi u ekonomiji, prikazati rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Općenito o linearnim diferencijalnim jednadžbama prvog reda

Jednadžba oblika

$$F\left(t,\ y(t),\ y'(t)\right) = 0, \tag{1}$$

gdje je $y = y(t)$ tražena vremenska putanja vremena naziva se običnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda, čije je rješenje vremenska putanja $y = y(t)$. U ovom radu fokusirat ćemo se na linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda s konstantnim koeficijentima:

$$y' + ay = b, \tag{2}$$

gdje su $a, b \in \mathbf{R}$. Naime, u praksi se pokazuje kako se modeliranje ekonomskih problema najčešće svodi na rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog ili drugog reda.

Jednadžbu prikazanu u (2) možemo riješiti metodom separacije varijabli. Ako je $b = 0$, riječ je o homogenoj jednadžbi

$$y' + ay = 0. \tag{3}$$

[1] Redoviti profesor u trajnom zvanju na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

[2] Asistentica na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Ideja ove metode je da se varijabla t i njezin diferencijal dt razdvoje od varijable y i njenog diferencijala dy. Dakle, (3) ćemo zapisati najprije kao

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0, \tag{4}$$

a potom separirati (razdvojiti) varijable y i t:

$$\frac{dy}{dt} = -ay \Big/ \cdot \frac{dt}{y}, \tag{5}$$

$$\frac{dy}{y} = -a\,dt. \tag{6}$$

Integriramo li i lijevu i desnu stranu jednadžbe (6) dobivamo

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dt, \tag{7}$$

odakle nalazimo traženo rješenje

$$\ln y = -at + c, \quad c \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

odnosno u nelogaritamskom obliku

$$y = e^{-at+c} = e^{-at} \cdot C, \quad C \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

pri čemu je konstanta $C = e^c$. Dakle, tražena vremenska putanja je

$$y\,(t) = C \cdot e^{-at}. \tag{10}$$

Ako se radi o nehomogenoj jednadžbi (2), tada najprije riješimo pripadnu homogenu jednadžbu i u tom rješenju konstantu C tretiramo kao funkciju varijable t (primjenjujemo metodu varijacije konstante):

$$y\,(t) = C\,(t) \cdot e^{-at} \tag{11}$$

i to opće rješenje homogene jednadžbe uvrstimo u (2):

$$C'\,(t) \cdot e^{-at} - a \cdot C\,(t) \cdot e^{-at} + a \cdot C\,(t) \cdot e^{-at} = b. \tag{12}$$

Slijedi

$$C'\,(t) \cdot e^{-at} = b, \tag{13}$$

$$\frac{dC}{dt} \cdot e^{-at} = b \Big/ \cdot e^{at} dt, \tag{14}$$

$$dC = b\,e^{at} dt, \tag{15}$$

pa iz

$$\int dC = b \int e^{at} dt, \tag{16}$$

nalazimo traženo rješenje

$$C\,(t) = \frac{b}{a} e^{at} + c. \tag{17}$$

Konačno, dobivenu funkciju $C(t)$ uvrstimo u opće rješenje (11):

$$y\,(t) = \left(\frac{b}{a} e^{at} + c\right) \cdot e^{-at} = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-at}. \tag{18}$$

Rješenje dano izrazom (18) je vremenska putanja $y(t)$. Dakle, varijabla y ovisi samo o vremenu t, te stoga možemo analizirati vrijednost varijable y u određenom vremenskom trenutku, ili što se u dugom roku događa s varijablom y – kažemo da analiziramo dinamičku stabilnost vremenske putanje. Dugi rok znači da varijabla t raste u neizmjerno, što znači da računamo limes funkcije $y(t)$ kada t teži u $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{b}{a} + c\cdot e^{-at}\right) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}, & a>0 \\ +\infty, & a<0 \text{ i } c>0 \\ -\infty, & a<0 \text{ i } c<0 \end{cases}. \tag{19}$$

Model tržišta jednog proizvoda

Sada ćemo razmotriti jednu primjenu rješavanja diferencijalne jednadžbe prvoga reda s konstantnim koeficijentima. Radi se o modelu tržišta jednog proizvoda na kojemu se susreću potražnja za nekim dobrom q_d i ponuda tog dobra q_s. Pretpostavlja se da ponuda i potražnja ovise samo o cijeni p razmatranog dobra:

$$q_d = q_d(p) \quad \text{i} \quad q_s = q_s(p). \tag{20}$$

Funkcija potražnje q_d za proizvodom je padajuća funkcija cijene p jer porast cijene uzrokuje smanjenje potražnje, dok je s druge strane funkcija ponude rastuća funkcija cijene p jer porast cijena potiče proizvođače na veću proizvodnju i prodaju radi ostvarenja većih zarada. Uobičajeno se pretpostavlja da su obje funkcije linearne, što možemo simbolički pisati na sljedeći način:

$$q_d = -ap + b, \quad a, b > 0 \tag{21}$$

i

$$q_s = -d + cp, \quad c, d > 0. \tag{22}$$

Ravnoteža na tržištu se ostvaruje kada je ponuda jednaka potražnji, međutim, na tržištu zbog kontinuirane promjene tražene i nuđene količine dolazi do promjene cijene, pa pretpostavljamo da je promjena cijene proporcionalna višku potražnje:

$$\frac{dp}{dt} = k(q_d - q_s), \quad k > 0. \tag{23}$$

Relacija (23) ima jednostavno objašnjenje: ako je potražnja veća od ponude, vrijedi $(q_d - q_s) > 0$ pa je promjena cijene pozitivna, što znači da dolazi do povećanja cijene. Dakle, ako je na tržištu ponuda veća od potražnje, ponuđači će povećati cijene s obzirom na bolju poziciju na tržištu. Obrnuto, ako je potražnja manja od ponude, vrijedi $(q_d - q_s) < 0$ i doći će do smanjenja cijene. Uvrštavajući (21) i (22) u (23), dobivamo:

$$\frac{dp}{dt} = k(b + d - (a+c)p). \tag{24}$$

Sređivanjem relacije (24), dobivamo diferencijalnu jednadžbu prvoga reda s konstantnim koeficijentima:

$$\frac{dp}{dt} + k(a+c)p = k(b+d). \tag{25}$$

Prema (10) rješenje pripadne homogene jednadžbe

$$\frac{dp}{dt} + k(a+c)p = 0 \tag{26}$$

je

$$p(t) = C(t)\cdot e^{-k(a+c)t}, \tag{27}$$

pa primjenom metode varijacije konstante nalazimo traženu vremensku putanju

$$p\,(t) = C \cdot\, e^{-k\,(a+c)t} + \frac{b+d}{a+c}. \tag{28}$$

Relacija (28) prikazuje cijenu proizvoda kao funkciju vremena. Budući da su $k,\ a,\ c > 0$, vrijedi

$$\lim_{t\to+\infty} p\,(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[C \cdot\, e^{-k\,(a+c)t} + \frac{b+d}{a+c}\right] = \frac{b+d}{a+c} = p^{*}. \tag{29}$$

Dakle, u dugom roku, ako nema vanjskih utjecaja na ponudu i potražnju za proizvodom na tržištu, dolazi do stabilizacije cijene oko ravnotežne vrijednosti $p^{*} = \dfrac{b+d}{a+c}$. Tada su ravnotežna potražnja i ponuda jednake:

$$q_d^{*} = -ap^{*} + b = \frac{bc-ad}{a+c}, \quad a, b > 0, \tag{30}$$

$$q_s^{*} = -d + cp^{*} = \frac{bc-ad}{a+c}, \quad c, d > 0. \tag{31}$$

Primjer

Konačno, na primjeru ćemo prikazati analizu modela tržišta za jednim proizvodom. Zadane su funkcije potražnje i ponude u ovisnosti o cijeni $p(t)$ linearnim funkcijama:

$$q_d = -p + 2 \quad \text{i} \quad q_s = -0.75 + 0.5p.$$

Pronađimo vremensku putanju cijene uz pretpostavku da je promjena cijene proporcionalna višku potražnje s koeficijentom 0.5, ako je početna cijena $p(0) = 2$. Diskutirajmo dinamičku stabilnost cijene.

Uvrštavanjem zadanih funkcija potražnje i ponude u (23), dobivamo relaciju promjene cijene na tržištu:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5\,\left(-1.5p + 2.75\right).$$

Sređivanjem prethodne relacije, dolazimo do diferencijalne jednadžbe po varijabli p:

$$\frac{dp}{dt} + 0.75p = 1.375.$$

Rješenje pripadne homogene jednadžbe je

$$p\,(t) = C\,(t) \cdot e^{-0.75t}.$$

Primjenom metode varijacije konstante, nalazimo da je tražena vremenska putanja

$$p\,(t) = C \cdot e^{-0.75t} + 1.83.$$

Budući da je poznat početni uvjet, možemo izračunati konstantu C:

$$p\,(0) = C \cdot e^{-0.75\cdot 0} + 1.83 = 2$$
$$p\,(0) = C + 1.83 = 2 \implies C = 0.17.$$

Konačno, tražena vremenska putanja je

$$p\,(t) = 0.17e^{-0.75t} + 1.83.$$

Kako bismo ispitali dinamičku stabilnost dobivene vremenske putanje cijene, odredit ćemo limes kada t teži u $+\infty$:

$$p^* = \lim_{t\to+\infty} p_t = \lim_{t\to+\infty} \left[e^{-0.75t} + 1.83\right] = 1.83.$$

Dakle, u dugom roku dolazi do stabilizacije cijene na tržištu, na ravnotežnu razinu od 1.83 novčanih jedinica. U tom slučaju ravnotežna potražnja, odnosno ponuda je 0.17 odgovarajućih jedinica.

Literatura

[1] A. C. Chiang, *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Mate d.o.o., Zagreb, (1994).

[2] E. T. Dowling, *Introduction to mathematical economics*, McGraw Hill, USA (2001).

[3] B. Šego, T. Škrinjarić, V. Kojić, *Odabrana poglavlja matematičke ekonomije*, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, (2014).