Jednakosti za produkte i kvadrate Fibonaccijevih i Lucasevih polinoma

Zvonko Čerin[1]

Sažetak. Za produkte i kvadrate Fibonaccijevih i Lucasevih polinoma koji poopćuju Fibonaccijeve i Lucaseve brojeve izvode se jednakosti koje je potaknuo kratki članak Nevena Jurića u MFL-u o jednoj takvoj jednakosti za Fibonaccijeve brojeve.

1. Fibonaccijevi i Lucasevi polinomi

Niz F_0, F_1, F_2, F_3,... Fibonaccijevih brojeva dobiva se tako da uzmemo $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i zahtijevamo jednakost $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ za svaki $k \geq 0$. Dakle, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, itd.

Vrlo sličan je i niz L_0, L_1, L_2, L_3,... Lucasevih brojeva za koje je $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, a pravilo rekurzije $L_{k+2} = L_{k+1} + L_k$ za svaki $k \geq 0$ je isto. Dakle, $L_2 = 3$, $L_3 = 4$, $L_4 = 7$, $L_5 = 11$, $L_6 = 18$, $L_7 = 29$, $L_8 = 47$, $L_9 = 76$, itd.

Budući da su polinomi (u jednoj varijabli x s cjelobrojnim koeficijentima) prirodno proširenje cijelih brojeva, gornje definicije se lagano mogu neznatno izmijeniti tako da vrijede za polinome. Npr., niz $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$,... Fibonaccijevih polinoma dobiva se tako da uzmemo $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ i tražimo

$$F_{k+2}(x) = x\,F_{k+1}(x) + F_k(x)$$

za svaki $k \geq 0$. Dakle, $F_2(x) = x$, $F_3(x) = x^2 + 1$, $F_4(x) = x(x^2 + 2)$, $F_5(x) = x^4 + 3\,x^2 + 1$, $F_6(x) = x(x^2 + 3)(x^2 + 1)$, itd. Pri tome očito vrijedi $F_k(1) = F_k$ za svaki $k \geq 0$ (tj. vrijednost k-tog Fibonaccijevog polinoma u $x = 1$ je jednaka k-tom Fibonaccijevom broju). S druge strane, ako je $x = n$ (prirodan broj), onda je $F_k(n) = F_k^{(n)}$ za svaki $k \geq 0$ (tj. vrijednost k-tog Fibonaccijevog polinoma u $x = n$ je jednaka k-tom članu n-tog metalnog niza Fibonaccijevih brojeva iz članka [4]).

Na sličan način se zahtjevima $L_0(x) = 2$, $L_1(x) = x$ i

$$L_{k+2}(x) = x\,L_{k+1}(x) + L_k(x)$$

za svaki $k \geq 0$ definiraju Lucasevi polinomi. Dakle, $L_2(x) = x^2 + 2$, $L_3(x) = x(x^2 + 3)$, $L_4(x) = x^4 + 4\,x^2 + 2$, $L_5(x) = x(x^4 + 5\,x^2 + 5)$, $L_6(x) = (x^2 + 2)(x^4 + 4\,x^2 + 1)$, itd. Sada slično vrijedi $L_k(1) = L_k$ za svaki $k \geq 0$.

Ako za svaki $k \geq 0$ zahtijevamo $f_{k+2}(x) = x f_{k+1}(x) - f_k(x)$ i slično $\ell_{k+2}(x) = x\,\ell_{k+1}(x) - \ell_k(x)$ (uz početne uvjete $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = 1$ i $\ell_0(x) = 2$, $\ell_1(x) = x$) definirat ćemo tzv. dualne Fibonaccijeve polinome $f_k(x)$ i dualne Lucaseve polinome $\ell_k(x)$. Dakle, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2 - 1$, $f_4(x) = x(x^2 - 2)$, $f_5(x) = x^4 - 3\,x^2 + 1$, $f_6(x) = x(x^2 - 3)(x^2 - 1)$, itd. i $\ell_2(x) = x^2 - 2$, $\ell_3(x) = x(x^2 - 3)$, $\ell_4(x) = x^4 - 4\,x^2 + 2$, $\ell_5(x) = x(x^4 - 5\,x^2 + 5)$, $\ell_6(x) = (x^2 - 2)(x^4 - 4\,x^2 + 1)$, itd.

[1] Autor je redoviti profesor na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: `cerin@math.hr`

Uvedimo oznake $\Delta = \sqrt{x^2+4}$, $\delta = \sqrt{x^2-4}$, $A = \frac{x+\Delta}{2}$, $B = \frac{x-\Delta}{2}$, $a = \frac{x+\delta}{2}$, $b = \frac{x-\delta}{2}$. Primijetimo da vrijede jednakosti $A+B = a+b = x$, $A-B = \Delta$, $a-b = \delta$, $AB = -1$ i $ab = 1$. Pomoću matematičke indukcije, kao i u knjizi [2] za Fibonaccijeve i Lucaseve brojeve kada je $x = 1$, lagano se dokazuje $F_k(x) = \frac{A^k - B^k}{\Delta}$, $L_k(x) = A^k + B^k$, $f_k(x) = \frac{a^k - b^k}{\delta}$ i $\ell_k(x) = a^k + b^k$ za sve $k \geq 0$. Desne strane prethodnih jednakosti su dobro definirane i za negativne vrijednosti od k, pa se uz malu dodatnu pažnju svi spomenuti polinomi mogu definirati za sve cjelobrojne indekse k.

2. Poopćenje jednakosti [3]

Neven Jurić je u članku [3] dokazao ovu zanimljivu jednakost za Fibonaccijeve brojeve za svaki prirodan broj i. Ranije se ta jednakost (zapravo njen kvadrat) pojavljuje u časopisu Fibonacci Quarterly (vidi [1] i [5]). Taj časopis je zlatni rudnik za Fibonaccijeve brojeve (pojedini dijelovi npr. Elementary Problems će biti razumljivi čak i srednjoškolcima) pa ga toplo preporučamo čitateljima MFL-a. Slobodno je dostupan na Internetu:

$$F_{i+1}\,F_i - F_{i+1}^2 = -F_i^2 - (-1)^i. \tag{2.1}$$

Nju smo namjerno zapisali na najneprihvatljiviji način s previše minusa da bi se što lakše prepoznalo da je ona poseban slučaj jednakosti (2.2). I doista, kada je $x = 1$ i $j = 1$ zato što je $L_1(x) = L_1(1) = L_1 = 1$ i $(-1)^j = -1$, iz (2.2) dobivamo (2.1).

Ova jednakost za Fibonaccijeve i Lucaseve polinome vrijedi za sve cijele brojeve i i j:

$$F_{i+j}(x)\,F_i(x)\,L_j(x) - F_{i+j}(x)^2 = (-1)^j\,F_i(x)^2 - (-1)^i\,F_j(x)^2. \tag{2.2}$$

Naravno da postoji verzija prethodne formule u kojoj glavnu ulogu vode Lucasevi polinomi:

$$L_{i+j}(x)L_i(x)L_j(x) - L_{i+j}(x)^2 = (-1)^j L_i(x)^2 + (-1)^i\left(\Delta F_j(x)\right)^2. \tag{2.3}$$

Iz nje se za $j = 1$ i $x = 1$ dobiva verzija formule (2.1) za Lucaseve brojeve:

$$L_{i+1}\,L_i - L_{i+1}^2 = -L_i^2 + 5\,(-1)^i. \tag{2.4}$$

Malo iznenađuje da su za dualne Fibonaccijeve i Lucaseve polinome verzije formula (2.2) i (2.3) puno jednostavnije:

$$f_{i+j}(x)f_i(x)\,\ell_j(x) - f_{i+j}(x)^2 = f_i(x)^2 - f_j(x)^2, \tag{2.5}$$

$$\ell_{i+j}(x)\,\ell_i(x)\,\ell_j(x) - \ell_{i+j}(x)^2 = \ell_i(x)^2 + \left(\delta f_j(x)\right)^2. \tag{2.6}$$

3. Ljepota formula za više brojeva

Sada se možemo zapitati postoje li slične formule kada umjesto samo dva cijela broja i i j promatramo tri, četiri, pet,...cijelih brojeva. Odgovor je potvrdan jer npr. ako imamo četiri broja i, j, k i m prikažemo sumu $i+j+k+m$ kao $(i+j)+(k+m)$ i primijenimo gornje formule za $i = i+j$ i $j = k+m$ pa ćemo dobiti jednu od takvih formula. Potpuno druga formula će nastati ako sumu $i+j+k+m$ prikažemo kao $i+(j+k+m)$ i primijenimo gornje formule za $i=i$ i $j=j+k+m$.

Kada bismo te formule prodavali na matematičkoj tržnici teško bismo postigli dobru cijenu i/ ili zaradu ako bi kupci znali da ih ima tako mnogo i da do njih lagano dolazimo. Jedino što bi nam moglo pomoći je ako ponudimo one formule koje su posebno lijepe iz ovog ili onog razloga. Ljepota uvijek privlači kupce premda kažu da nije sve u ljepoti no činjenica je da ipak nešto jest. Zato Vam sada nudim sljedeće četiri formule za tri broja i, j i k za koje bih uvijek rekao da su lijepe. Pa tko voli neka izvoli. Pozivam čitatelje da i oni sebi pronađu neku njima lijepu formulu za (dualne) Fibonaccijeve i Lucaseve polinome.

Uvedimo oznake $z=i+j+k$ (zbroj svih), $z_i=j+k$ (zbroj svih osim i), $z_j=k+i$ i $z_k=i+j$. Imamo ovu jednakost:

$$\begin{aligned} &L_{z_k}(x)\,F_{z_j}(x)\,F_{z_i}(x)-F_z(x)^2 \\ &\qquad=(-1)^{z_k}F_k(x)^2-(-1)^{z_j}F_j(x)^2-(-1)^{z_i}F_i(x)^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Za Lucaseve polinome imamo sličnu (lijepu) formulu (u dvije verzije):

$$\begin{aligned} L_{z_k}(x)\,L_{z_j}(x)\,L_{z_i}(x)-L_z(x)^2&=(-1)^{z_k}L_k(x)^2+\Delta^2\left[(-1)^{z_j}F_j(x)^2+(-1)^{z_i}F_i(x)^2\right] \\ &=(-1)^{z_k}L_k(x)^2+(-1)^{z_j}L_j(x)^2+(-1)^{z_i}L_i(x)^2+8\,(-1)^z. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Analogne jednakosti za dualne Fibonaccijeve i Lucaseve polinome su još ljepše:

$$\ell_{z_k}(x)f_{z_j}(x)f_{z_i}(x)-f_z(x)^2=f_k(x)^2-f_j(x)^2-f_i(x)^2. \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \ell_{z_k}(x)\,\ell_{z_j}(x)\,\ell_{z_i}(x)-\ell_z(x)^2&=\ell_k(x)^2+\delta^2\left[f_j(x)^2+f_i(x)^2\right] \\ &=\ell_k(x)^2+\ell_j(x)^2+\ell_i(x)^2-8. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ako u gornje četiri jednakosti odaberemo $i=0$, $j=j$ i $k=i$ radi se zapravo o jednakostima (2.2), (2.3), (2.5) and (2.6) redom. Dakle, lijepe jednakosti za tri broja sadrže (lijepe) jednakosti za dva broja kao posebne slučajeve.

4. Dokaz jednakosti (2.2)

Jer je $AB=-1$ i također $F_k(x)=\dfrac{A^k-B^k}{\Delta}$ i $L_k(x)=A^k+B^k$ za svaki cijeli broj k, primijetimo prvo da je kvadrat $(\Delta\,F_k(x))^2$ jednak

$$(A^k-B^k)^2=A^{2k}-2\,(AB)^k+B^{2k}=A^{2k}-2\,(-1)^k+B^{2k}.$$

Neka je $M=A^{i+j}-B^{i+j}$. Za sve cijele brojeve i i j vrijedi

$$\begin{aligned} &\Delta^2\left[F_{i+j}(x)\,F_i(x)\,L_j(x)-F_{i+j}(x)^2\right] \\ &\quad=M\left[\left(A^i-B^i\right)\left(A^j+B^j\right)-M\right] \\ &\quad=M\left(A^iB^j-A^jB^i\right)=(AB)^j\left(A^{2i}+B^{2i}\right)-(AB)^i\left(A^{2j}+B^{2j}\right) \\ &\quad=(-1)^j\left(A^{2i}-2(-1)^i+B^{2i}\right)-(-1)^i\left(A^{2j}-2(-1)^j+B^{2j}\right) \\ &\quad=\Delta^2\left[(-1)^jF_i(x)^2-(-1)^iF_j(x)^2\right]. \end{aligned}$$

Iz gornje jednakosti dijelenjem s Δ^2 dobit ćemo (2.2).

5. Dokaz jednakosti (2.3)

Za svaki cijeli broj k kvadrat $L_k(x)^2$ je jednak

$$(A^k + B^k)^2 = A^{2k} + 2\,(AB)^k + B^{2k} = A^{2k} + 2\,(-1)^k + B^{2k}.$$

Neka je $N = A^{i+j} + B^{i+j}$. Za sve cijele brojeve i i j vrijedi

$$\begin{aligned} L_{i+j}(x)\,L_i(x)\,L_j(x) - L_{i+j}(x)^2 &= N\left[(A^i + B^i)\left(A^j + B^j\right) - N\right] \\ &= N\left(A^i B^j + A^j B^i\right) = (AB)^j\left(A^{2i} + B^{2i}\right) + (AB)^i\left(A^{2j} + B^{2j}\right) \\ &= (-1)^j\left(A^{2i} + 2(-1)^i + B^{2i}\right) + (-1)^i\left(A^{2j} - 2(-1)^j + B^{2j}\right) \\ &= (-1)^j\,L_i(x)^2 + (-1)^i\,(\Delta\,F_j(x))^2\,. \end{aligned}$$

Dakle, možemo primijetiti da se dokaz za (2.3) dobiva iz ovog za (2.2) samo izmjenom predznaka ključnih članova.

Dokazi jednakosti (2.5) and (2.6) su slični prethodnima pa ih prepuštamo čitateljima za vježbu. Zbog jednakosti $a\,b = 1$ jasno je da se -1 ne pojavljuje.

6. Dokaz jednakosti (3.1)

Neka je $C_k = A^k + B^k$ i $D_k = A^k - B^k$. Za sve cijele brojeve i, j i k vrijedi:

$$\begin{aligned} &\Delta^2\left[L_{z_k}(x)\,F_{z_j}(x)\,F_{z_i}(x) - F_z(x)^2\right] \\ &\quad = C_{z_k}\,D_{z_j}\,D_{z_i} - D_z^2 \\ &\quad = 2\,(-1)^z + (A\,B)^{z_k}\,C_{2k} - (A\,B)^{z_j}\,C_{2j} - (A\,B)^{z_i}\,C_{2i} \\ &\quad = (-1)^{z_k}\left(C_{2k} - 2(-1)^k\right) - (-1)^{z_j}\left(C_{2j} - 2(-1)^j\right) - (-1)^{z_i}\left(C_{2i} - 2(-1)^i\right) \\ &\quad = \Delta^2\left[(-1)^{z_k}\,F_k(x)^2 - (-1)^{z_j}\,F_j(x)^2 - (-1)^{z_i}\,F_i(x)^2\right]. \end{aligned}$$

Dijeljenjem gornje jednakosti s Δ^2 dobivamo (3.1). Slično se dokazuju jednakosti (3.2), (3.3) i (3.4).

Literatura

[1] Andrew Cusumano, *Problem B-896*, Fibonacci Quarterly, **38** 2 (2000), 181.

[2] Andrej Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[3] Neven Jurić, *Jedno svojstvo Fibonaccijevih brojeva*, Matematičko-fizički list **61** 4 (2010. – 2011.), 223–224.

[4] Vedran Krčadinac i Marijana Vrdoljak, *Metalni rezovi*, Matematičko-fizički list **60** 2 (2009. – 2010.), 80–85.

[5] Kee-Wai Lau, *Solution of Problem B-896*, Fibonacci Quarterly, **39** 1 (2001), 88.