ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2015. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/262.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 294.

A) Zadaci iz matematike

3469. Nađi sva rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} y^2+u^2+v^2+w^2 &= 4x-1 \\ x^2+u^2+v^2+w^2 &= 4y-1 \\ x^2+y^2+v^2+w^2 &= 4u-1 \\ x^2+y^2+u^2+w^2 &= 4v-1 \\ x^2+y^2+u^2+v^2 &= 4w-1\,. \end{aligned}$$

3470. Ako je $x^2+y^2+z^2=49$, $x+y+z=x^3+y^3+z^3=7$, koliko je xyz?

3471. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4n+1}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}\,.$$

3472. Duljine bridova kvadra su a, b, c, dok je d duljina njegove prostorne dijagonale. Dokaži da vrijedi

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq\sqrt{3}abcd\,.$$

Kada vrijedi jednakost?

3473. Odredi sumu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}\,.$$

3474. Unutar paralelograma $ABCD$ dana je dužina $\overline{EF}$ takva da je $EF\|BC$. Pravci BE i CF sijeku se u točki G, dok se AE i DF sijeku u H. Dokaži da je $\sphericalangle BAE=\sphericalangle GHE$.

3475. Neka je ABC bilo koji trokut. S njegove vanjske strane konstruirani su jednakokračni trokuti ARB, BPC, CQA kojima su svi kutovi uz stranice trokuta jednaki 30°. Dokaži da je trokut PQR jednakostraničan.

3476. Neka je $P_1P_2\ldots P_{12}$ pravilni dvanaesterokut. Dokaži da se pravci P_1P_5, P_4P_8 i P_3P_6 sijeku u istoj točki.

3477. Dane su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Točke F i G su plovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Točke H i K su polovišta dijagonala $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ Dokaži da vrijedi

$$|AB|^2+|CD|^2=2(|FG|^2+|HK|^2)\,.$$

3478. Dane su tri kružnice sa središtima A, B i C, polumjera a, b i c. Prva kružnica dodiruje druge dvije izvana u točkama P i Q. Ove dvije nemaju zajedničkih točaka. Dokaži da vrijedi

$$|PQ|^2=\frac{a^2d^2}{(a+b)(a+c)}\,,$$

gdje je d duljina zajedničke vanjske tangente kružnica sa središtima B i C.

3479. Ako su a, $b\neq c$ duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi, dokaži jednakost

$$\frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{b+c}{b-c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sin(\beta-\gamma)}\,.$$

3480. Dokaži da za svaki prirodan broj $n>3$ postoji konveksan poligon s n stranica, od kojih nisu sve iste duljine, tako da je suma udaljenosti svake unutarnje točke do njegovih stranica konstantan.

3481. Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su rombovi $\underline{ABB_2A_1}$, $\underline{BCC_2B_1}$, $\underline{CAA_2C_1}$. Da li su dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ stranice nekog trokuta?

3482. Dani su brojevi a, b, c takvi da je

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

Dokaži da su dva od ova tri razlomka jednaka 1, a treći -1.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 390. Luka trči brzinom $7\ \mathrm{m/s}$, a Sara brzinom $5\ \mathrm{m/s}$. Počeli su pravocrtno trčati s istog mjesta, ali je Sara počela trčati jednu minutu prije Luke. Koliko će biti udaljeni od početne točke kad Luka dostigne Saru?

OŠ – 391. Ako se na oprugu objesi uteg od 400 grama ona se produži 10 centimetara. Koliko će biti produženje svake opruge ako dvije takve jednake opteretimo utegom mase 1 kilogram kad su one obješene:

a) jedna na drugu

b) jedna pored druge?

OŠ – 392. Na udaljenosti 50 cm od sabirne leće nalazi se predmet čija se oštra slika može uhvatiti na zastoru koji je od nje udaljen 2 m. Ako tu leću zamijenimo lećom dvostruko manje žarišne daljine, a predmet ostavimo na istom mjestu, na koju će se udaljenost od leće morati postaviti zaslon da bi slika opet bila oštra? Za leće vrijedi da je zbroj recipročne vrijednosti udaljenosti predmeta od leće i recipročne vrijednosti udaljenosti slike od leće jednak recipročnoj vrijednosti žarišne daljine.

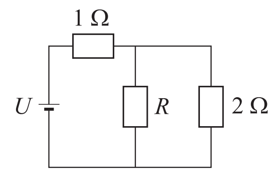
OŠ – 393. Kepler-186f je jedan od nedavno otkrivenih planeta u svemiru za koje se pretpostavlja da bi mogli imati uvjete za razvoj života. Znanstvenici znaju da mu je promjer oko 1.11 puta veći od Zemljinog. Odredi masu koju bi taj planet morao imati da mu ubrzanje sile teže bude jednako kao na Zemlji. Kolika bi mu bila gustoća? Ubrzanje sile teže je proporcionalno s masom i obrnuto proporcionalno s radijusom planeta. Masa Zemlje je $5.97 \cdot 10^{24}$ kg, a njen je polumjer 6371 km.

1588. Orbita za odlaganje geostacionarnih satelita ("junk orbit") ima 500 km veći radijus kruženja od geostacionarne. Izračunaj ophodno vrijeme satelita u toj orbiti, te vrijeme potrebno satelitu da zaostane jedan puni krug za rotacijom Zemlje. Za Zemlju uzeti $T = 24$ h, $GM = 4 \cdot 10^{14}$ m^3/s^2.

1589. Uteg mase 450 g obješen je na oprugu. Period titranja utega poveća se 0.11 s ako na uteg učvrstimo dodatnu masu 50 g. Odredi konstantu elastičnosti opruge i period titranja za oba slučaja.

1590. Kratkovidna osoba bez pomoći naočala može vidjeti oštru sliku objekata između 16 i 40 cm udaljenosti od oka. Odredi jačinu leća naočala koju osoba treba. Do koje najmanje udaljenosti ta osoba vidi oštru sliku s naočalama?

1591. Odredi otpor R takav da u strujnom krugu na slici Jouleova snaga u preostala dva otpornika bude jednaka.



1592. Odredi energiju koju bi oslobodila nuklearna reakcija jednog grama ^{7}litij-hidrida (LiH). Reakcija $^1\mathrm{H} + {}^7\mathrm{Li} \rightarrow 2 \cdot {}^4\mathrm{He} + Q$ oslobađa $Q = 17\,347$ keV energije.

1593. Neka je prosječna gustoća asteroida 2050 kg/m^3, koji je kugla polumjera 475 km (Ceres). Odredi ubrzanje sile teže na površini i brzinu oslobađanja (potrebnu za uzlet s površine na vrlo veliku udaljenost).

1594. Pri temperaturi 273 K, brzina zvuka u zraku iznosi 331 m/s, a u heliju 972.5 m/s. Koliko treba povećati temperaturu da brzina zvuka u heliju bude 700 m/s veća nego u zraku iste temperature?

C) Rješenja iz matematike

3441. *Odredi sve trojke cijelih brojeva* (x, y, z) *koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 .$$

Rješenje. Korištenjem identiteta

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z)$$

i uvjeta

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3$$

slijedi

$$(x + y)(x + z)(y + z) = 0.$$

Odavde zaključujemo da je skup rješenja zadane jednadžbe

$$\{(i, -i, j) : i, j \in \mathbf{Z}\} \cup \{(k, l, -k) : k, l \in \mathbf{Z}\} \cup \{(m, n, -n) : m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

Zlatko Petolas (2), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3442. *Dokaži da za pozitivne realne brojeve* a, b, c *vrijedi nejednakost*

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a + b + c) .$$

Prvo rješenje.

$$\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{abc}$$
$$=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+(a+b+c)-(a+b+c)$$
$$=\left(\frac{a^2}{c}+c\right)+\left(\frac{b^2}{a}+a\right)+\left(\frac{c^2}{b}+b\right)$$
$$-(a+b+c)$$
$$\geq 2(a+b+c)-(a+b+c)=a+b+c,$$

pri čemu smo koristili $x^2+y^2\geq 2xy$.

Dakle, pokazali smo

$$\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{abc}\geq a+b+c$$

što je ekvivalentno postavljenoj nejednakosti.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

Drugo rješenje. Dokazat ćemo pomoćnu nejednakost

$$4a^3b+b^3c+2c^3a\geqslant 7a^2bc.$$

Međutim, ona vrijedi po A-G jer je

$$4a^3b+b^3c+2c^3a\geqslant 7\sqrt[7]{a^{14}b^7c^7}=7a^2bc.$$

Ciklično se dokaže

$$4b^3c+c^3a+2a^3b\geqslant 7ab^2c$$
$$4c^3a+a^3b+2b^3c\geqslant 7abc^2.$$

Sve tri nejednakosti se zbroje i dobijemo

$$7(a^3b+b^3c+c^3a)\geq 7abc(a+b+c)$$

i nejednakost je dokazana.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Petar Orlić (3),
XV. gimnazija, Zagreb

3443. *Neka su a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 pozitivni brojevi takvi da je $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$. Dokaži nejednakost*

$$\prod_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{a_i}-1\right)\geq 1024\,.$$

Rješenje.

$$\prod_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{a_i}-1\right)=\frac{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}\cdot\frac{a_1+a_3+a_4+a_5}{a_2}$$
$$\cdot\frac{a_1+a_2+a_4+a_5}{a_3}\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+a_5}{a_4}$$
$$\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_5}$$
$$\geq\frac{4\sqrt[4]{a_2a_3a_4a_5}}{a_1}\cdot\frac{4\sqrt[4]{a_1a_3a_4a_5}}{a_2}$$
$$\cdot\frac{4\sqrt[4]{a_1a_2a_4a_5}}{a_3}\cdot\frac{4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_5}}{a_4}$$
$$\cdot\frac{4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}{a_5}$$
$$=4^5=1024.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=\frac{1}{5}$.

Sara Džebo (3),
Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

3444. *Ako je*

$$xy+x+y=71$$
$$x^2y+xy^2=880$$

odredi x^2+y^2.

Rješenje. Označimo $u=x+y$, $v=xy$. Tada je

$$u+v=71$$
$$uv=880.$$

Tada su u, v rješenja kvadratne jednadžbe

$$t^2-71t+880=0.$$

Ova jednadžba ima dva rješenja:

$$(u,v)\in\{(55,16),\ (16,55)\}.$$

Kako je $x^2+y^2=u^2-2v$ dobivamo

$$x^2+y^2\in\{146,\ 2993\}.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3445. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\frac{9}{11+\log x}+\frac{2}{7-\log x}=\frac{13}{12}\,.$$

Rješenje. Označimo $u = \log x$. Sada se

$$\frac{9}{11+u} + \frac{2}{7-u} = \frac{13}{12},$$

množenjem obje strane s $12(11+u)(7-u)$ svodi na

$$13u^2 - 32u + 19 = 0 \implies u_1 = 1,\ u_2 = \frac{19}{13},$$

tj. imamo dva rješenja zadane jednadžbe

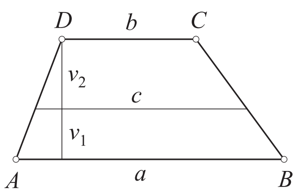
$$x_1 = 10, \quad x_2 = 10^{19/13}.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3446. *Duljine paralelnih stranica trapeza su a i b. Odredi duljinu dužine paralelne s bazama trapeza koja ga dijeli na dva dijela jednakih površina.*

Rješenje. Neka je c tražena duljina, v visina zadanog trapeza s bazama a i b, v_1 visina trapeza kojemu su baze a i c, te v_2 visina trapeza kojemu su baze c i b. Tada iz uvjeta zadatka slijedi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} v = \frac{a+c}{2} v_1 = \frac{c+b}{2} v_2.$$



Dakle,

$$v_1 = \frac{a+b}{2(a+c)} v, \quad v_2 = \frac{a+b}{2(b+c)} v,$$

pa uvrštavanjem u $v_1 + v_2 = v$ redom dobivamo

$$\frac{a+b}{2(a+c)} + \frac{a+b}{2(b+c)} = 1$$

$$\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+b}{b+c} = 2$$

$$\frac{a+b}{a+c} - 1 + \frac{a+b}{b+c} - 1 = 0$$

$$\frac{b-c}{a+c} + \frac{a-c}{b+c} = 0$$

$$\frac{b^2 - c^2 + a^2 - c^2}{(a+c)(b+c)} = 0$$

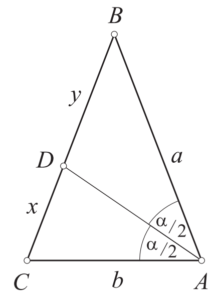
$$c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3447. *Povučena je simetrala AD jednakokračnog trokuta ABC ($|AB| = |BC|$). Odredi duljinu stranice $\overline{AC}$ ako je $P_{ABD} = S_1$ i $P_{ADC} = S_2$.*

Rješenje. Označimo $a = |AB| = |BC|$, $b = |AC|$, $x = |CD|$, $y = |DB|$. Tada je

$$\frac{v_a \cdot x}{2} = S_2, \quad \frac{v_a \cdot y}{2} = S_1 \implies \frac{x}{y} = \frac{S_2}{S_1}.$$



Iz svojstva simetrale kuta o dijeljenju stranice $\overline{BC}$ imamo:

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{y} = \frac{S_2}{S_1} \implies a = b\frac{S_1}{S_2}.$$

S druge strane

$$\frac{bv_b}{2} = S_1 + S_2$$

pa je

$$b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = 2(S_1 + S_2)$$

$$b\sqrt{b^2\frac{S_1^2}{S_2^2} - \frac{b^2}{4}} = 2(S_1 + S_2)$$

$$b^2\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} - \frac{1}{4}} = 2(S_1 + S_2)$$

$$|AC| = b = \sqrt{\frac{2(S_1+S_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} - \frac{1}{4}}}}.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3448. *U šiljastokutnom trokutu ABC, $\overline{AD}$ i $\overline{CM}$ su njegove visine, opseg trokuta ABC je 15 cm, opseg trokuta MBD je 9 cm i polumjer opisane kružnice trokuta MBD je 1.8 cm. Izračunaj duljinu stranice $\overline{AC}$.*

Rješenje. Iz kosinusova teorema i $\triangle MBD$ imamo

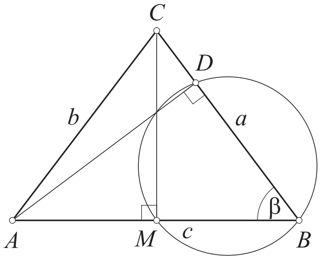
$$|MD|^2 = |MB|^2 + |BD|^2 - 2|MB| \cdot |BD| \cos\beta,$$

a iz $\triangle ABD$:

$$|BD| = |AB| \cos\beta, \quad \text{tj.} \quad |BD| = c\cos\beta,$$

te iz $\triangle BCM$:

$$|MB| = |BC| \cos\beta, \quad \text{tj.} \quad |MB| = a\cos\beta.$$



Sada dobivamo:

$$|MD|^2 = a^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\beta - 2ac\cos^3\beta$$

$$|MD|^2 = \cos^2\beta(a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta),$$

odnosno

$$|MD|^2 = \cos^2\beta \cdot b^2, \quad \text{tj.} \quad |MD| = b\cos\beta.$$

Iz $o_{\triangle ABC} = a + b + c = 15$ cm i $o_{\triangle MBD} = |MB| + |MD| + |BD| = 9$ cm dobivamo $(a + b + c)\cos\beta = 9$, odakle je $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$. Sada je

$$|MB| = \frac{3}{5}a, \quad |BD| = \frac{3}{5}c, \quad |MD| = \frac{3}{5}b.$$

Primjenom teorema o sinusima na trokut MBD imamo:

$$\frac{|MD|}{\sin\beta} = 2R$$

$$\frac{3}{5}b = 2 \cdot 1.8\sin\beta$$

$$b = 6\sin\beta,$$

odnosno zbog

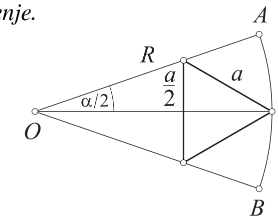
$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$|AC| = b = 4.8 \text{ cm}.$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3449. *U kružni isječak AOB kruga polumjera R sa središnjim kutom α upisan je jednakostraničan trokut kojemu je jedan vrh u polovištu luka $\overset{\frown}{AB}$, a preostala dva su na polumjerima $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$. Kolika je duljina stranice trokuta?*

Rješenje.



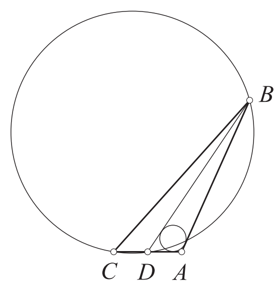
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{R - \frac{\sqrt{3}}{2}a} \implies a = \frac{2R\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3450. *Dan je trokut ABC kod kojeg je $|AC| : |BC| = 1 : 3$ i $\measuredangle ACB = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Točka D je polovište stranice $\overline{AC}$. Nađi omjer površine kruga opisanog trokutu BCD i površine kruga upisanog trokutu ABD.*

Rješenje. $\gamma = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{5}}{2} \implies \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} = \dfrac{2}{3} \implies \sin\gamma = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Dalje, $a = 3b$ i iz kosinusovog poučka slijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 6b^2 \implies c = \sqrt{6}b.$$



Kako je $|CD| = \dfrac{b}{2}$, iz kosinusovog poučka također slijedi

$$|DB| = \frac{\sqrt{29}}{2}b.$$

Površina trokuta ABC iznosi

$$P_{\triangle ABC} = \frac{ab\sin\gamma}{2} = b^2\frac{\sqrt{5}}{2}$$

i

$$P_{\triangle BCD} = P_{\triangle ABD} = \frac{P_{\triangle ABC}}{2} = b^2\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Ako sa ρ označimo polumjer upisane kružnice trokutu ABD onda je

$$\frac{|DB| + \frac{b}{2} + c}{2}\rho = P_{\triangle ABD}$$

$$\implies \rho = \frac{\sqrt{5}}{1 + 2\sqrt{6} + \sqrt{29}}b.$$

Ako je R radijus opisane kružnice trokutu BCD tada je

$$\sin\gamma = \frac{|DB|}{2R} \implies R = \frac{3\sqrt{29}}{4\sqrt{5}}b.$$

Traženi omjer površina je tada

$$\frac{R^2}{\rho^2} = \frac{261 \cdot (1 + 2\sqrt{6} + \sqrt{29})^2}{400} \approx 83.08$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3451. *Dokaži da za* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x \sin^6 x} \geq 80\,.$$

Rješenje. Koristeći $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a, b \in \mathbf{R}$, slijedi

$$\frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x} \geq \frac{2}{\cos^3 x \sin^3 x} = \frac{16}{\sin^3(2x)}$$

$$\geq 16$$

$$\frac{1}{\cos^6 x \sin^6 x} = \frac{64}{\sin^6(2x)} \geq 64.$$

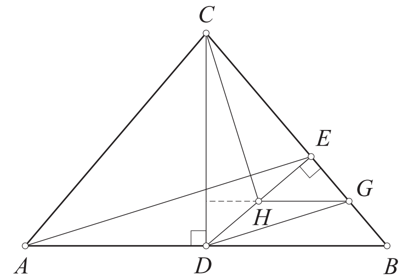
Sve zajedno

$$\frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x \sin^6 x} \geq 16 + 64 = 80.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3452. *Dan je jednakokračan trokut* ABC*,* $|CA| = |CB|$*. Točka* D *je polovište stranice* $\overline{AB}$ *i dužina* $\overline{DE}$ *je okomita na* $\overline{BC}$*. Točka* H *je polovište dužine* $\overline{DE}$*. Dokaži da je* $CH \perp AE$*.*

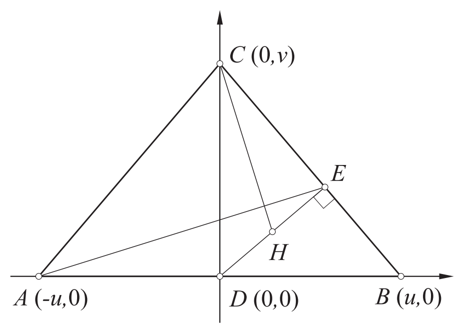
Prvo rješenje. Neka je G polovište dužine $\overline{BE}$; tada je dužina $\overline{HG}$ srednjica $\triangle DBE$, te je $HG \| BD$ i $HG \perp CD$. Dužina $\overline{DG}$ je srednjica $\triangle ABE$ pa je $DG \| AE$



U $\triangle DGC$ pravci DE i GH su pravci na kojima leže visine tog trokuta jer je $DE \perp BC$ i $HG \perp CD$ pa je točka H ortocentar $\triangle DGC$; zbog toga je $CH \perp DG$, odnosno zbog $DG \| AE$ slijedi $CH \perp AE$.

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Postavimo vrhove trokuta u kartezijev koordinatni sustav tako da je $A = (-u, 0)$, $B = (u, 0)$, $C = (0, v)$ za neke $u, v > 0$. Tada je točka D u ishodištu koordinatnog sustava.



Presjek pravca kroz točke B, C i normale tog pravca koja prolazi kroz D daje koordinate točke $E = \left(\frac{v^2c}{c^2 + v^2}, \frac{c^2v}{c^2 + v^2}\right)$, pa je $H = \left(\frac{v^2c}{2(c^2 + v^2)}, \frac{c^2v}{2(c^2 + v^2)}\right)$. Koeficijent smjera pravca kroz CH:

$$k_{CH} = \frac{-c^2 - 2v^2}{cv},$$

Koeficijent smjera pravca kroz AE:

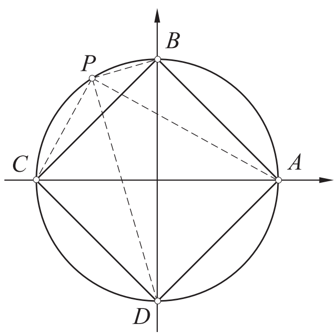
$$k_{AE} = \frac{cv}{c^2 + 2v^2}.$$

Zbog $k_{CH} \cdot k_{AE} = -1$ slijedi tvrdnja.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3453. *Kvadrat je upisan u kružnicu polumjera* r. *Dokaži da je suma četvrtih potencija udaljenosti proizvoljne točke na kružnici do vrhova kvadrata konstantan.*

Rješenje. Postavimo vrhove kvadrata A, B, C, D kao na slici: $A = (r, 0)$, $B = (0, r)$, $C = (-r, 0)$, $D = (0, -r)$. Neka je $P = (u, v)$ proizvoljna točka na kružnici, $x^2 + y^2 = r^2$.



Računamo:

$$d^4(A, P) = [(u - r)^2 + v^2]^2 = (2r^2 - 2ru)^2,$$
$$d^4(B, P) = [u^2 + (v - r)^2]^2 = (2r^2 - 2rv)^2,$$
$$d^4(C, P) = [(u + r)^2 + v^2]^2 = (2r^2 + 2ru)^2,$$
$$d^4(D, P) = [u^2 + (v + r)^2]^2 = (2r^2 + 2rv)^2.$$

$$d^4(A, P) + d^4(C, P) = 8r^4 + 8r^2u^2,$$
$$d^4(B, P) + d^4(D, P) = 8r^4 + 8r^2v^2$$

$$d^4(A, P) + d^4(B, P) + d^4(C, P) + d^4(D, P)$$
$$= 16r^4 + 8r^4 = 24r^4.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3454. *Ako su* a, b, c *duljine stranica trokuta i* α, β, γ *nasuprotni im kutovi, dokaži da vrijedi*

$$a^2\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha$$
$$= b^2\cos^2\beta\cos^2 2\beta + c^2\cos^2\gamma\cos^2 2\gamma$$
$$+ 2bc\cos\beta\cos\gamma\cos 2\beta\cos 2\gamma\cos 4\alpha\,.$$

Rješenje. Koristit ćemo

$$a = 2r\sin\alpha, \quad b = 2r\sin\beta, \quad c = 2r\sin\gamma,$$

gdje je r radijus opisane kružnice trokutu.

$$a^2\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha$$
$$= 4r^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha$$
$$= r^2\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha = \frac{r^2}{4}\sin^2 4\alpha$$
$$= \frac{r^2}{4}\sin^2(4\pi - 4\beta - 4\gamma) = \frac{r^2}{4}\sin^2(4\beta + 4\gamma)$$
$$= \frac{r^2}{4}(\sin^2 4\beta\cos^2 4\gamma + \cos^2 4\beta\sin^2 4\gamma$$
$$+ 2\sin 4\beta\cos 4\beta\sin 4\gamma\cos 4\gamma)$$
$$= \frac{r^2}{4}(\sin^2 4\beta(1 - \sin^2 4\gamma) + (1 - \sin^2 4\beta)\sin^2 4\gamma$$
$$+ 2\sin 4\beta\cos 4\beta\sin 4\gamma\cos 4\gamma)$$
$$= \frac{r^2}{4}(\sin^2 4\beta + \sin^2 4\gamma - 2\sin^2 4\beta\sin^2 4\gamma$$
$$+ 2\sin 4\beta\cos 4\beta\sin 4\gamma\cos 4\gamma)$$
$$= \frac{r^2}{4}(\sin^2 4\beta + \sin^2 4\gamma + 2\sin 4\beta\sin 4\gamma$$
$$\cdot(\cos 4\beta\cos 4\gamma - \sin 4\beta\sin 4\gamma))$$
$$= \frac{r^2}{4}(\sin^2 4\beta + \sin^2 4\gamma$$
$$+ 2\sin 4\beta\sin 4\gamma\cos(4\beta + 4\gamma))$$
$$= \frac{r^2}{4}(16\sin^2\beta\cos^2\beta\cos^2 2\beta$$
$$+ 16\sin^2\gamma\cos^2\gamma\cos^2 2\gamma$$
$$+ 32\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma$$
$$\cdot\cos 2\beta\cos 2\gamma\cos 4\alpha)$$
$$= (2r\sin\beta)^2\cos^2\beta\cos^2 2\beta$$
$$+ (2r\sin\gamma)^2\cos^2\gamma\cos^2 2\gamma$$
$$+ 2(2r\sin\beta)(2r\sin\gamma)\cos\beta\cos\gamma$$
$$\cdot\cos 2\beta\cos 2\gamma\cos 4\alpha$$
$$= b^2\cos^2\beta\cos^2 2\beta + c^2\cos^2\gamma\cos^2 2\gamma$$
$$+ 2bc\cos\beta\cos\gamma\cos 2\beta\cos 2\gamma\cos 4\alpha.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 382. *Učenik je želio izračunati korisnost električnog bojlera koji ima termometar koji točno pokazuje temperaturu vode u njemu. Zabilježio da je temperatura prije uključivanja* iznosila $25\,^\circ\mathrm{C}$. Nakon jednog sata povisila se je na $55\,^\circ\mathrm{C}$. Snaga bojlera je 2500 W, u njemu je 60 l vode, a specifični toplinski kapacitet vode iznosi $4200\ \mathrm{J/kgK}$. Kolika je korisnost bojlera? Kolika struja teče kroz njega? Napon gradske električne mreže je 230 V.

Rješenje.

$t_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$

$t_2 = 55\,^\circ\mathrm{C}$

$\Delta t = t_2 - t_1 = 30\,^\circ\mathrm{C}$

$t = 1\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}$

$P = 2500\ \mathrm{W}$

$V = 60\ \mathrm{l}$

$m = 60\ \mathrm{kg}$

$c = 4200\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}}$

$\underline{U = 230\ \mathrm{V}}$

$I,\ \eta = ?$

$$Q_k = c \cdot m \cdot \Delta t = 4200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}} \cdot 60\ \mathrm{kg} \cdot 30\,^\circ\mathrm{C} = 7\,560\,000\ \mathrm{J};$$

$$Q_u = P \cdot t = 2500\ \mathrm{W} \cdot 3600\ \mathrm{s} = 9\,000\,000\ \mathrm{J};$$

$$\eta = \frac{Q_k}{Q_u} = \frac{7\,560\,000\ \mathrm{J}}{9\,000\,000\ \mathrm{J}} = 0.84 = 84\%;$$

$$I = \frac{P}{U} = \frac{2500\ \mathrm{W}}{230\ \mathrm{V}} = 10.87\ \mathrm{A}.$$

Ante Šego (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 383. *Drveni valjak ima promjer 10 cm. Postavljen u uspravan položaj tlači podlogu tlakom od 1600 Pa. Kolika mu je visina? Gustoća drva od kojeg je valjak napravljen iznosi* $800\ kg/m^3$.

Rješenje.

$d = 10\ \mathrm{cm}$

$p = 1600\ \mathrm{Pa}$

$\underline{\rho = 800\ \mathrm{kg/m^3}}$

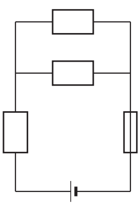
$h = ?$

$$p = \frac{G}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = \rho \cdot h \cdot g;$$

$$h = \frac{p}{\rho \cdot g} = \frac{1600\ \mathrm{Pa}}{800\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 0.2\ \mathrm{m}.$$

Corina Jakovac (8),
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice

OŠ – 384. *Osigurač u strujnom krugu na shemi može izdržati struju do 1 A. Napon izvora je 30 V, a otpori paralelno spojenih otpornika iznose 20 i 30* Ω. *Koju najmanju vrijednost mora imati otpor trećeg otpornika da osigurač ne bi pregorio?*



Rješenje.

$I_{\max} = 1\ \mathrm{A}$

$U = 30\ \mathrm{V}$

$R_1 = 20\ \Omega$

$\underline{R_2 = 30\ \Omega}$

$R_3 = ?$

Ukupni otpor strujnog kruga mora biti najmanje

$$R_{\min} = \frac{U}{I_{\max}} = \frac{30\ \mathrm{V}}{1\ \mathrm{A}} = 30\ \Omega;$$

$$R_{\min} = R_p + R_3$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega} = \frac{3+2}{60\ \Omega} = \frac{5}{60\ \Omega}$$

$$R_p = 12\ \Omega;$$

$$R_3 = R_{\min} - R_p = 30\ \Omega - 12\ \Omega = 18\ \Omega.$$

Ante Šego (8), Zagreb

OŠ – 385. *Učenik je aluminijski valjak objesio na oprugu konstante elastičnosti* $16\ N/m$ *i ona se produljila za 25 cm. U posudi površine dna* $80\ cm^2$ *je razina vode udaljena od vrha posude 2 cm. Hoće li se voda preliti ako valjak uronimo u posudu? Gustoća aluminija je* $2700\ kg/m^3$.

Rješenje.

$k = 16\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

$\Delta l = 25\ \mathrm{cm} = 0.25\ \mathrm{m}$

$A = 80\ \mathrm{cm}^2$

$\Delta h = 2\ \mathrm{cm}$

$\underline{\rho = 2700\ \mathrm{kg/m}^3}$

$V = A \cdot \Delta h = 80\ \mathrm{cm}^2 \cdot 2\ \mathrm{cm} = 160\ \mathrm{cm}^3$;

$F = \Delta l \cdot k = 0.25\ \mathrm{m} \cdot 16\ \mathrm{N/m} = 4\ \mathrm{N} = G$;

$m_{\text{valjka}} = \dfrac{G}{g} = \dfrac{4\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{N/kg}} = 0.4\ \mathrm{kg}$;

$$V_{\text{valjka}} = \frac{m}{\rho} = \frac{0.4\ \mathrm{kg}}{2700\ \mathrm{kg/m}^3} = 0.000148\ \mathrm{m}^3 = 148\ \mathrm{cm}^3$$

Kako je $V > V_{\text{valjka}}$, voda se neće preliti.

Ivan Brnelić (8),
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice

1574. *U nekom trenutku tijelo se giba uzbrdo po kosini brzinom* 1 m/s. *Nakon zaustavljanja i pokretanja niz kosinu, tijelo ponovo prijeđe isti položaj nakon 1.5 s, brzinom* 0.5 m/s *(suprotnog smjera). Odredi prevaljeni put, nagib kosine i koeficijent trenja tijela i kosine.*

Rješenje. Tijelo prvo usporava akceleracijom a_1 gibajući se uzbrdo, zatim ubrzava a_2 nizbrdo. Vrijeme 1.5 sekundi je zbroj trajanja t_1 i t_2, a duljine putova su jednake, $s_1 = s_2 = s$. Uz $v_1 = 1$ m/s i $v_2 = 0.5$ m/s imamo:

$$s_1 = \frac{a_1}{2}t_1^2 = \frac{v_1 t_1}{2} = s_2 = \frac{v_2 t_2}{2}$$
$$\frac{1 \cdot t_1}{2} = \frac{0.5 \cdot t_2}{2},$$

što uz $t_1 + t_2 = 1.5$ s daje $t_1 = 0.5$ s i $t_2 = 1$ s. Tada je $a_1 = -v_1/t_1 = -2\ \mathrm{m/s}^2$ i $a_2 = v_2/t_2 = 0.5\ \mathrm{m/s}^2$. Put je $s = v_1 t_1/2 = v_2 t_2/2 = 0.25$ m. Iz izraza za ubrzanje na kosini uz trenje imamo:

$$a_1 = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha,$$
$$a_2 = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha,$$

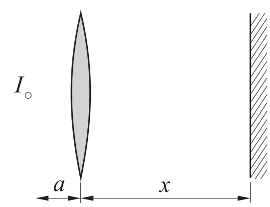
pa oduzimanjem slijedi

$$\sin\alpha = \frac{a_2 - a_1}{2g} = \frac{2.5}{2 \cdot 9.81} = 0.127421.$$

Odatle je $\alpha = 7.32^\circ$ i uvršteno u jednadžbu za a_1 ili a_2 slijedi $\mu = 0.077$.

Ur.

1575. *Točkasti izvor svjetlosti, konvergentna leća i ravno zrcalo poredani su kao na slici. Ako je udaljenost izvora od leće* $a = 2$ *cm, a jačina leće* $J = 10$ *dpt, koliki mora biti razmak* x *leće i zrcala da bi od svjetlosti iz izvora dobili paralelan snop nakon refleksije i ponovnog prolaska kroz leću?*



Rješenje. Slika leće u zrcalu je simetrična leći, dakle na udaljenosti x desno od zrcala, tj. $2x$ od leće. "Predmet" za tu "leću" mora biti u njezinom lijevom fokusu, ako želimo da izlazni snop desno bude paralelan. Jačini $J = 10$ dpt odgovara žarišna daljina $f = 1/J = 0.1$ m. Slijedi da je slika koju stvara "prva" leća na udaljenosti $b_1 = 2x - 0.1$. Uz $a_1 = 0.02$ m iz jednadžbe leće dobivamo:

$$J = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1},$$
$$10 = \frac{1}{0.02} + \frac{1}{2x - 0.1}$$

Rješenje po x iznosi $x = 0.0375$ m $= 3.75$ cm, što znači da je slika koju stvara "prva" leća virtualna, na udaljenosti $b_1 = -2.5$ cm od leće.

Ur.

1576. *Koristeći izraz za moment tromosti kugle, odredi moment tromosti šuplje aluminijske kugle mase 2 kg, vanjskog radijusa 10 cm. Kolika je debljina aluminija? Gustoća aluminija je* 2700 kg/m^3.

Rješenje. Uzmimo prvo punu aluminijsku kuglu radijusa $R_1 = 10$ cm. Njena bi masa bila

$$m_1 = \rho \cdot \frac{4}{3} R_1^3 \pi = 11.31 \text{ kg},$$

a moment tromosti

$$I_1 = \frac{2}{5} m_1 R_1^2 = 0.04524 \text{ kg m}^2.$$

Kako je zadana šuplja kugla mase 2 kg, od dobivenog momenta tromosti treba oduzeti moment kugle radijusa R_2 koji odgovara masi $m_2 = 9.31$ kg. Odgovarajući je radijus $R_2 = 9.372$ cm, pa je debljina aluminija $d = R_1 - R_2 = 0.628$ cm, a $I_2 = 0.03271 \text{ kg m}^2$. Moment tromosti šuplje kugle je tada $I = I_1 - I_2 = 0.01253 \text{ kg m}^2$.

Ur.

1577. *U prvom mjerenju gravitacijske konstante G (Cavendish, 1798) upotrijebljene su olovne kugle mase 158 kg. Koristeći konstantu G izračunaj ubrzanje na površini te kugle zbog njenog gravitacijskog polja. Gustoća olova je 11 300 kg/m^3, a G iznosi $6.674 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.*

Rješenje. Koristeći izraz za masu kugle

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi$$

dobivamo radijus $R = 0.14945$ m. Ubrzanje na površini je

$$g = \frac{Gm}{R^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 158}{0.14945^2} = 4.721 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2.$$

Ur.

1578. *Na kojoj bi se udaljenosti iza Mjeseca morao nalaziti opažač kojemu bi prividne veličine Mjeseca i Zemlje bile jednake? Upotrijebi srednje vrijednosti za radijus Zemlje (6371 km), Mjeseca (1738 km) i udaljenosti Zemlja-Mjesec (384 400 km).*

Rješenje. Iz sličnosti jednakokračnih trokuta s bazom promjera (Zemlje ili Mjeseca), visinom udaljenosti ($d + x$ za Zemlju, x za Mjesec) dobivamo omjer:

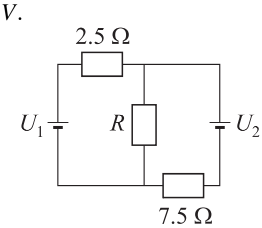
$$\frac{x}{2r_M} = \frac{d + x}{2r_Z}$$

$$\frac{x}{3476} = \frac{384400 + x}{12742}.$$

Odatle je $x = 144\,200$ km, a pripadni kutni promjer Zemlje (i Mjeseca) $1^\circ 29'$, što je oko tri puta veće od Mjeseca gledano sa Zemlje.

Ur.

1579. *Koliki je otpor R u strujnom krugu na shemi, ako njime teče struja 2 A? $U_1 = 9$ V, $U_2 = 12$ V.*



Rješenje. S U_R označimo napon na otporniku R, a s I_1 i I_2 struje koje prolaze izvorima U_1 i U_2. Iz Kirchoffovih pravila imamo

$$U_1 = I_1 \cdot 2.5 + U_R$$

$$U_2 = I_2 \cdot 7.5 + U_R$$

$$I_1 + I_2 = 2 \text{ A} = \frac{U_R}{R}.$$

Oduzimamjem prve dvije jednadžbe slijedi

$$U_2 - U_1 = 3 \text{ V} = 7.5 I_2 - 2.5 I_1,$$

što kao sustav s trećom jednadžbom određuje $I_1 = 1.2$ A i $I_2 = 0.8$ A. Tada je $U_R = U_2 - 7.5 I_2 = 6$ V, pa je otpor R jednak

$$\frac{U_R}{I_1 + I_2} = \frac{6}{2} = 3 \ \Omega.$$

Ur.

1580. *Koliko puta više Sunčeve svjetlosti padne na površinu Jupitera nego na površinu Zemlje? Jupiter je prosječno 5.2 puta udaljeniji od Sunca, i prosječan radijus mu iznosi 69 200 km (za Zemlju uzeti 6371 km).*

Rješenje. Intenzitet zračenja opada s kvadratom udaljenosti, pa je Sunčeva svjetlost u okolini Jupitera $5.2^2 = 27.04$ puta slabija nego na Zemlji. Presječna površina na koju svjetlost pada je $S = R^2 \pi$, a kako je zadani radijus 10.862 puta veći za Jupiter, površina je 117.98 puta veća. Dijeljenjem dobivenih omjera slijedi da na Jupiter pada 4.363 puta više Sunčeve svjetlosti nego na Zemlju.

Ur.