



56. Državno natjecanje iz matematike Trogir, 8. – 10. travnja 2015.

Matematička natjecanja su ove školske godine počela 29. siječnja 2015., kada su održana školska (odnosno gradska) natjecanja. Županijska natjecanja su održana 27. veljače. Na temelju konačnih rezultata županijskih natjecanja, određen je popis učenika koji će sudjelovati na Državnom natjecanju.

Zadatke za sve razine natjecanja priređuje Državno povjerenstvo koje se sastoji od tri potpovjerenstva s po 20-ak članova: za osnovne škole, srednje škole A varijante i srednje škole B varijante. Tajnica državnog povjerenstva ove je godine *Draženska Kovačević, prof.*, viša savjetnica za matematiku Agencije za odgoj i obrazovanje.

Državno natjecanje iz matematike za učenike osnovnih i srednjih škola ove je godine održano u dvije osnovne škole: OŠ kralja Zvonimira u Segetu Donjem i OŠ “Ivan Duknović” u Marini. Od pozvanih 253 učenika sudjelovalo je njih 252 i to: 83 iz osnovnih škola (V. – 20, VI. – 21, VII. – 21, VIII. – 21), 94 iz srednjih škola A varijante (I. – 23, II. – 22, III. – 25, IV. – 24) i 75 iz srednjih škola B varijante (I. – 19, II. – 18, III. – 19, IV. – 19).

Sudionici državnog natjecanja su bili smješteni u hotelu Medena.

Prvog dana održan je sastanak Državnog povjerenstva u hotelu Medena, a zatim smo se podijelili i svaka grupa je otišla u svoju osnovnu školu, gdje su obavljene pripreme za sutrašnje natjecanje. Navečer je u kongresnoj dvorani hotela Medena održano svečano otvaranje. Prisutnima su se obratili: *Dominik Matković*, ravnatelj Osnovne škole kralja Zvonimira, Seget Donji, *Vlade Matas*, ravnatelj podružnice Split Agencije za odgoj i obrazovanje, *Mirko Matijaš*, ravnatelj Osnovne škole “Ivan Duknović”, Marina i na kraju *Mea Bombardelli*, predsjednica Državnog povjerenstva.

U četvrtak u 9 sati počelo je natjecanje. Učenici OŠ rješavali su zadatke 3 sata, a učenici SŠ 4 sata. Poslije podne je povjerenstvo pregledavalo i ocjenjivalo učenička rješenja, a navečer su se, nakon službene prezentacije rješenja, rješavale žalbe. Nakon svega održan je završni sastanak Državnog povjerenstva i donesene su odluke o nagradama. Po već ustaljenim pravilima određeno je 19 učenika koji će tokom travnja sudjelovati na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi u borbi za mjesto u ekipama za 56. Međunarodnu matematičku olimpijadu u Tajlandu i 9. Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu u Sloveniji. Posljednjeg dana, prije proglašenja rezultata, održan je Okrugli stol na kojem su sudjelovali M. Bombardelli, D. Kovačević, Ž. Buranji, N. Antončić i mentori učenika.

Na svečanom proglašenju najboljim mladim matematičarima uručena su priznanja i skromne nagrade, knjige u izdanju Hrvatskog matematičkog društva. Osnovnoškolcima je uručeno 9 prvih, 7 drugih i 12 trećih nagrada, dok je 19 učenika bilo pohvaljeno. Za srednje je škole podijeljeno 7 prvih, 7 drugih, 9 trećih nagrada i 22 pohvale za A varijantu, te 6 prvih, 7 drugih, 9 trećih nagrada i 14 pohvala za B varijantu.

Nagrade i pohvale

A varijanta

I. razred

Petar Nizić-Nikolac, XV. gimnazija, Zagreb, *Marko Prološčić*, III. gimnazija Osijek, Osijek (I. nagrada); *Tadej Petar Tukara*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Nikola Sole*, V. gimnazija, Zagreb, *Luka Banović*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka (III. nagrada); *Tea Arvaj*, III. gimnazija, Osijek, *Paula Vidas*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Sinčić*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka (pohvala).

II. razred

Adrian Beker, XV. gimnazija, Zagreb, *Lukas Novak*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec (I. nagrada); *Robert Benić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Patrik Papac*, Gimnazija Dubrovnik, Dubrovnik, *Josip Kelava*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin (III. nagrada); *Ela Dimoli*, XV. gimnazija, Zagreb, *Marin Njirić*, Gimnazija Dubrovnik, Dubrovnik, *Marin Knežević*, XV. gimnazija, Zagreb, *Timon Spiegl*, Srednja škola Krapina, Krapina, *Mario Zec*, Gimnazija, Daruvar (pohvala).

III. razred

Petar Orlić, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Leon Starešinić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Daniel Paleka*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, *Domagoj Bradač*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Andrija Mandić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Marko Jukić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Marin Sinožić*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka, *Karlo Šerbetar*, Gimnazija "Fran Galović", Koprivnica, *Ivan Barta*, XV. gimnazija, Zagreb, *Mihovil Stručić*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, *Kristijan Rupić*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Ivan Lazarić, Gimnazija Pula, Pula, *Kristijan Štefanec*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Josip Pupiće*, XV. gimnazija, Zagreb, *Vedran Mihal*, Gimnazija "Matija Mesić", Slavonski Brod (II. nagrada); *Kristijan Vedran Budrovčan*, XV. gimnazija, Zagreb, *Matej Pavlović*, 3. gimnazija Split, Split (III. nagrada); *Ivan Miošić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Ploče, *Tonko Sabolčec*, XV. gimnazija, Zagreb, *Nikola Šalgaj*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Paško Majcenović*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, *Bruno Bijelić*, V. gimnazija, Zagreb, *Branimir Filipović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Aleksandar Opančar*, XV. gimnazija, Zagreb, *Kristijan Vukelić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Ivan Žufić*, Gimnazija Pula, Pula (pohvala).

B varijanta

I. razred

Benyamin Taourirt, Srednja škola Ivanec, Ivanec (I. nagrada); *Josip Ivančević*, Srednja škola Petra Šegedina, Korčula (II. nagrada); *Ivan Petar Draškić*, I. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Azra Tabaković*, Tehnička škola, Karlovac, *Ivan Novak*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec, *Tea Juračić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Karlo Maček*, Tehnička škola, Čakovec (pohvala).

II. razred

Patrik Matošević, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile, Pazin (I. nagrada); *Matej Salković*, Srednja škola Ambroza Haračića, Cres, *Mihaela Wang*, V. gimnazija "Vladimir Nazor" Split, Split (II. nagrada); *Lugo Mihovilić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Antonijo Marijić*, Klasična gimnazija fra Marijana Lanosovića, Slavonski Brod,

Marija Puljić, II. gimnazija, Zagreb, *Lucija Glazer*, Gimnazija Bjelovar, Bjelovar (III. nagrada); *Tin Župančić*, Srednja škola “Ban Josip Jelačić”, Zaprešić, *Veronika Brkić*, V. gimnazija “Vladimir Nazor” Split, Split, *Borna Zbodulja*, Srednja škola Ivanec, Ivanec (pohvala).

III. razred

Antonio Buljan, V. gimnazija “Vladimir Nazor” Split, Split (I. nagrada); *Ivan Kuljak*, Srednja škola Zlatar, Zlatar (II. nagrada); *Mia Baržić*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec, *Tin Komerički*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (III. nagrada); *Katarina Zornada*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile, Pazin, *Damir Čupić*, Srednja škola Mate Balote, Poreč, *Dora Antunović*, Srednja škola Petra Šegedina, Korčula, *Margareta Sigmund*, Isusovačka klasična gimnazija s pravom javnosti u Osijeku, Osijek (pohvala).

IV. razred

Martin Bajzek, Srednja škola Zlatar, Zlatar, *Iva Brnić*, II. gimnazija, Zagreb, *Marta Han*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska (I. nagrada); *Marijana Zrilić*, Gimnazija Jurja Barakovića, Zadar, *Luka Banović*, Isusovačka klasična gimnazija s pravom javnosti u Osijeku, Osijek, *Karlo Liović*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (II. nagrada); *Antonio Matušan*, Srednja škola Markantuna de Dominisa Rab, Rab, *Patrick Mijatović*, Gimnazija “Matija Mesić”, Slavonski Brod (III. nagrada); *Marin Milina*, Srednja škola Petra Šegedina, Korčula, *Dario Stuhne*, Srednja škola Krapina, Krapina, *Viktorija Blagec*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (pohvala).

Zadaci s državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Oko okruglog stola nalazi se deset stolica označenih redom brojevima od 1 do 10 (pri čemu su stolice 1 i 10 susjedne) i na svakoj sjedi po jedan vitez. Svaki vitez na početku ima paran broj zlatnika. Istovremeno svaki vitez pokloni polovinu svojih zlatnika svom lijevom susjedu, a pola svojih zlatnika svom desnom susjedu. Nakon toga vitez na stolici 1 ima 22 zlatnika, a svaki idući za dva više, sve do viteza na stolici 10 koji ima 40 zlatnika. Koliko je zlatnika na početku imao vitez koji na kraju ima 36 zlatnika?
2. Dokaži da ne postoji prirodni broj n takav da $6^n - 1$ dijeli $7^n - 1$.
3. Neka su a , b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4.$$

4. Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geq 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti proizvoljni iznos. Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.
5. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B . Pravac l siječe kružnicu k_1 u točkama C i E , a kružnicu k_2 u točkama D i F tako da se točka D nalazi između C i E , a točka E između D i F . Pravci CA i BF sijeku se u točki G , a pravci DA i BE u točki H . Dokaži da je $CF \parallel HG$.

II. razred

1. Neka su a, b, c i d međusobno različiti realni brojevi. Ako su a i b rješenja jednadžbe $x^2 - 10cx - 11d = 0$, a c i d rješenja jednadžbe $x^2 - 10ax - 11b = 0$, odredi zbroj $a + b + c + d$.

2. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, m, n) takve da je p prost broj i da vrijedi

$$p^m - n^3 = 8.$$

3. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AC| > |AB|$. Neka je N nožište visine iz A na stranicu \overline{BC} . Neka je točka P na produžetku dužine \overline{AB} preko vrha B , te neka je točka Q na produžetku dužine \overline{AC} preko vrha C tako da je $BPQC$ tetivni četverokut. Ako vrijedi $|NP| = |NQ|$, dokaži da je N središte kružnice opisane trokutu APQ .

4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

5. Skakavac se na početku nalazi u ishodištu brojevnog pravca, na broju 0, a zatim skače uvijek u istom smjeru. Za prirodni broj k , skakavac u prvom skoku dolazi na broj 1, a svaki sljedeći skok je točno k puta dulji od prethodnog. Na mjestu svakog višekratnika broja 2015 nalazi se rupa. Odredi sve prirodne brojeve k takve da skakavac može skočiti 2015 puta, a da pritom ne uskoči u rupu.

III. razred

1. U trokutu ABC vrijedi $|BC| + |AC| = 2|AB|$ i $\sphericalangle BAC - \sphericalangle CBA = 90^\circ$. Odredi kosinus kuta $\sphericalangle ACB$.

2. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, m, n) takve da je p prost broj i da vrijedi

$$2^m p^2 + 1 = n^5.$$

3. U nekoj državi između svaka dva grada postoji ili izravna autobusna ili izravna željeznička veza (sve veze su dvosmjerne i ne prolaze ni kroz jedan drugi grad). Dokaži da je gradove u toj državi moguće rasporediti u dva disjunktna skupa tako da je sve gradove u jednom skupu moguće obići putujući samo željeznicom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput, a sve gradove u drugom skupu putujući samo autobusom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput.

4. Na stranici \overline{AC} trokuta ABC nalaze se točke D i E tako da je točka D između C i E . Neka je F sjecište kružnice opisane trokutu ABD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s BC tako da se točke E i F nalaze s različitih strana pravca AB . Neka je G sjecište kružnice opisane trokutu BCD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s AB tako da se točke E i G nalaze s različitih strana pravca BC . Dokaži da točke D, E, F i G leže na istoj kružnici.

5. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c \geq 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}.$$

IV. razred

1. Odredi sve funkcije $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(xy)(x+f(y)) = x^2f(y) + y^2f(x).$$

2. Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C . Neka su A' , B' , C' redom nožišta okomica povučenih iz težišta trokuta ABC na pravce BC , CA , AB . Odredi omjer površina trokuta $A'B'C'$ i ABC .

3. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji djelitelj d broja n takav da

$$dn + 1 \mid d^2 + n^2.$$

4. Neka je n prirodni broj. Odredi sve pozitivne realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \dots + \frac{(n+1)^2}{x+n} + nx^2 = nx + \frac{n(n+3)}{2}.$$

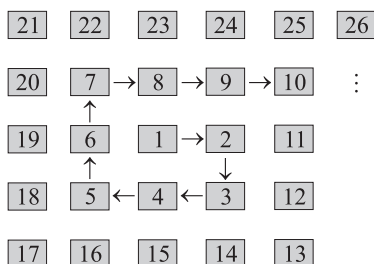
5. Na ploču dimenzija 8×8 postavljaju se tromino-pločice oblika $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ tako da svaka tromino-pločica prekriva točno tri polja ploče, a međusobno se ne prekrivaju. Koliko je najmanje tromino-pločica potrebno postaviti na ploču ako želimo da se nakon toga više ne može postaviti nijedna dodatna tromino-pločica?

Zadaci s državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Ako je $xyz = abc$, koliko je $\frac{bx}{xy+ab+bx} + \frac{cy}{yz+bc+cy} + \frac{az}{zx+ca+az}$?

2. Prirodne brojeve redom ispisujemo tako da formiraju spiralu brojeva kao na slici:



Pozicija nekog broja određuje se u odnosu na broj 1. Primjerice, broj 24 nalazi se za 1 mjesto udesno i 2 mjesta prema gore. Odredite poziciju na kojoj se nalazi broj 2015 u odnosu na broj 1.

3. Svaki je član Maričine obitelji popio 4 decilitra mješavine kave i mlijeka. Količina kave i mlijeka je različita u svakoj šalici, ali nikad nije nula. Marica je popila jednu četvrtinu ukupne količine mlijeka i jednu šestinu ukupne količine kave. Koliko članova ima Maričina obitelj?

4. Skup točaka (x, y) u koordinatnoj ravnini za koje vrijedi

$$|x| \leq a, a \in \mathbf{Z}, a > 0, x + y \geq 0, |1 - y| \leq 2,$$

sadrži 2015 točaka s cjelobrojnim koordinatama. Odredite broj a i površinu danog skupa točaka.

5. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbf{N}$ tačno jedan od brojeva $A_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ i $B_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ djeljiv s 5.

II. razred

1. Odredite realni parametar k tako da sustav jednađžbi

$$\left[\operatorname{Im} \left(z + \frac{1}{2}i \right) \right]^2 = |z + 2|^2 + \frac{5}{4} \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(z) - 2\operatorname{Re}(z) = k, \quad z \in \mathbf{C}$$

ima samo jedno rješenje?

2. U pravokutnom trokutu kojemu je c duljina hipotenuze, a , b duljine kateta te α , β njima redom nasuprotni kutovi, vrijedi nejednakost $5c^4 \geq 6a^2c^2 + 8b^4$. Odredite sve vrijednosti koje mogu poprimiti kutovi α i β u tom trokutu.
3. Riješite sustav jednađžbi

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} &= 126 \\ x + y - 12(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 36 + 2\sqrt{xy} &= 0. \end{aligned}$$

4. Pinokio ponedjeljkom i utorkom govori istinu, subotom uvijek laže, a ostale dane u tjednu ili govori istinu ili laže. Na pitanje "Koji ti je predmet u školi najdraži?" šest uzastopnih dana u tjednu davao je redom sljedeće odgovore: "Povijest", "Matematika", "Zemljopis", "Fizika", "Kemija", "Fizika". Koji predmet Pinokio najviše voli? Objasnite svoj odgovor.
5. Točka E je polovište stranice \overline{AB} kvadrata $ABCD$. Na dijagonali \overline{AC} odabrana je točka F tako da je trokut \overline{EFD} pravokutan s pravim kutom u F . U kojem omjeru točka F dijeli dijagonalu \overline{AC} ?

III. razred

1. Uređeni parovi (a, b) i (c, d) su rješenja sustava jednađžbi

$$\begin{aligned} \log_{225} x + \log_{64} y &= 4 \\ \log_x 225 - \log_y 64 &= 1. \end{aligned}$$

Izračunajte $\log_{30}(abcd)$.

2. Ako su a , b , c duljine stranica trokuta, α , β , γ njima nasuprotni kutovi i R polumjer trokutu opisane kružnice, dokažite da vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

3. U trostranoj piramidi $ABCD$ pobočka BDC okomita je na osnovku ABC , $|BD| = |DC| = 1$, a svi bočni bridovi pri vrhu D zatvaraju kut od 60° . Odredite obujam trostrane piramide.
4. Nad stranicama pravokutnog trokuta kojemu su a , b duljine kateta, konstruirani su prema van kvadrati. Izračunajte (u ovisnosti o a i b) površinu trokuta kojemu su vrhovi u središtima konstruiranih kvadrata.
5. Odredite sve proste brojeve p , q i prirodan broj r tako da vrijedi

$$p^2 + q^2 + pq = r^2.$$

IV. razred

1. Odredite područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ i odredite broj rješenja jednađžbe $f(x) = a$, u ovisnosti o realnom broju a .

2. Izračunajte površinu trokuta kojemu duljine dviju stranica iznose 13 cm i 14 cm, a duljina simetrale kuta između tih dviju stranica iznosi $\frac{28\sqrt{13}}{9}$ cm.
3. Zadani su pravci $p_1 \dots y = \frac{1}{4}x$, $p_2 \dots y = 9x$ i točka $T(6, -1)$. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom T , a os apscisa, pravce p_1 , p_2 i os ordinata siječe redom u točkama A , B , C , D tako da vrijedi $|AB| = |CD|$.
4. Zadane su sljedeće funkcije:
- $$f(x) = 10^{10x}, \quad g(x) = \log\left(\frac{x}{10}\right), \quad h_1(x) = g(f(x)), \quad h_n(x) = h_1(h_{n-1}(x)),$$
- za sve $n \geq 2$. Odredite zbroj znamenaka broja $h_{2015}(1)$.
5. Na nekom košarkaškom turniru ekipe "Vukovi" i "Medvjedi" su prvu četvrtinu odigrali neriješeno. Bodovi koje su Vukovi osvojili u svakoj od 4 četvrtine čine rastući geometrijski niz, a bodovi koje su Medvjedi osvojili po četvrtinama čine rastući aritmetički niz. Na kraju su Vukovi pobijedili s jednim bodom razlike. Niti jedna ekipa nije osvojila više od 100 bodova. Odredite ukupan broj bodova koje su obje ekipe zajedno osvojile na kraju prvog poluvremena.

Učenici pozvani na Hrvatsku matematičku olimpijadu, tj. kandidati za međunarodna natjecanja su:

I. razred: *Petar Nizić-Nikolac, Marko Prološčić*

II. razred: *Adrian Beker, Lukas Novak, Robert Benić, Patrik Papac, Josip Kelava*

III. razred: *Petar Orlić, Leon Starešinić, Daniel Paleka, Domagoj Bradač, Andrija Mandić, Marko Jukić*

IV. razred *Ivan Lazarić, Kristijan Štefanec, Josip Pupiće, Vedran Mihal, Kristian Vedran Budrovčan, Matej Pavlović*

6. Hrvatska matematička olimpijada održana je 18. i 19. travnja (zajednički testovi) i 25. travnja (test za IMO i test za MEMO). U nedjelju 26. travnja održano je proglašenje pobjednika. Najuspješniji na ovogodišnjem HMO-u je Ivan Lazarić.

Željko Hanjš