



S NASIH FAKULTETA

Preddiplomski i diplomski sveučilišni studij geologije na PMF-u Sveučilišta u Zagrebu

Franka Miriam Brückler¹, Dijana Ilišević², Gordana Medunić³

Geologija, odnosno znanost o Zemlji, bavi se cijelim mnoštvom pitanja kao što su neka od sljedećih: Kako nastaju planine? Kada bi bilo moguće prokopati put do središta Zemlje, što bismo tamo pronašli? Ako znamo da je temperatura u unutarnjoj jezgri Zemlje gotovo jednaka onoj od Sunca, zašto se onda naš planet ne rastali? Je li doista Zemljina površina svojevrsna slagalica sastavljena od pomicnih dijelova? Kako uopće doći do tih spoznaja? Osim dotičnih pitanja, studenti geologije na PMF-u susreću se s temeljnim spoznajama o povijesti Zemlje, njezinoj građi te prirodnim procesima koji doprinose njezinu današnjem izgledu. Postoji cijeli raspon problema povezanih s okolišem koji utječe ne samo na naš planet, nego i na cijelokupno društvo, a u čijem rješavanju aktivno sudjeluju geolozi: mogućnost predviđanja potresa, tsunamija i vulkanskih erupcija; procjenjivanje dinamike potrošnje Zemljinih resursa; propitivanje potrebe žrtvovanja suvremenih pogodnosti u svrhu zaštite okoliša; dokazivanje trendova klimatskih promjena, itd. Geologija uključuje velik broj disciplina. Primjerice, dok je petrologija znanost o stijenama, mineralogija je znanost o mineralima unutar tih stijena. Paleontologija je znanost o Zemljinoj davnoj prošlosti, koja uključuje svima znanе dinosaure i druga stvorena čiji nas fosilizirani ostaci i dalje zadržavaju. Hidrologija je znanost koja istražuje vodene tokove na Zemlji, a oceanologija je usredotočena na oceane. Osim sa znanstvenim aspektima geoloških disciplina, studenti geologije upoznaju se i s ekonomskom primjenjivošću Zemljinih resursa. Tijekom studija uče o tome da gotovo svi tvornički proizvodi sadrže minerale ili pak tvari koje potječu od njih. Minerali su gotovo posvuda oko nas, pa navedimo samo nekolicinu primjera: aluminijske pivske limenke, grafit u pisacim olovkama, halitni kristalići soli posuti po prženim krumpirićima u restoranu brze prehrane, te svjetlucavo i uglavnom skupocjeno dragi kamenje. Stoga se nameće intrigantno pitanje: Što su zapravo minerali i odakle potječu? Od velikog ekonomskog značaja su neke stijene, inače sastavljene od mnoštva minerala, u koje ubrajamo ugljen, mramor i granit. Sveukupno gledano, Zemlja je golemo i raznoliko mjesto u svemiru koje pruža nepresušan izvor ideja za znanstvena istraživanja, jer – znanje je predivno... .

Studij geologije na Geološkom odsjeku PMF-a izvodi se kroz sljedeće sveučilišne studijske programe: preddiplomski sveučilišni studij geologije u trajanju nastave 3 godine (upisuje se 36 studenata) te diplomski sveučilišni studij geologije u trajanju nastave 2 godine, podijeljen u 3 smjera: Geologija i paleontologija, Mineralogija i petrologija, te Geologija zaštite okoliša.

¹ Autorica je docent na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: bruckler@math.hr

² Autorica je redoviti profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: ilisevic@math.hr

³ Autorica je izvanredni profesor na Geološkom odsjeku PMF-a; e-pošta: gmedunic@geol.pmf.hr

Završetkom preddiplomskog studija studenti stječu akademski naziv prvostupnika geologije (univ. bacc. geol.). Studij mogu nastaviti na diplomskom studiju geologije ili na nekom srodnom diplomskom studiju. Završetkom diplomskog studija geologije stječe se akademski naziv magistra geologije (mag. geol.).

Shema studija prikazana je u tablici 1.

1. godina	2. godina	3. godina	4. godina	5. godina
Preddiplomski sveučilišni studij geologije			Diplomski sveučilišni studij geologije, smjer Geologija i paleontologija	
			Diplomski sveučilišni studij geologije, smjer Mineralogija i petrologija	
			Diplomski sveučilišni studij geologije, smjer Geologija zaštite okoliša	

Tablica 1. Struktura studija geologije.

Uz to postoji i poslijediplomski sveučilišni studij u trajanju nastave 3 godine, čija su svrha i ishod znanstveno usavršavanje i stjecanje titule doktor znanosti iz polja geoznanosti – grana Geologija i mineralogija. Osim toga, pri Geološkom odsjeku izvodi se i poslijediplomski interdisciplinarni studij oceanologije.

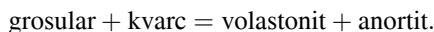
Sve službene informacije o studiju geologije mogu se pronaći na web stranicama Geološkog odsjeka PMF-a u Zagrebu (<http://www.pmf.unizg.hr/geol>).

U nastavku ćemo opisati neke matematičke sadržaje sa studija geologije.

Među kolegijima na prvoj godini studija (“kolegijima” nazivamo predmete na Sveučilištu) su Matematika 1 i Matematika 2. Gradivo Matematike 1 obuhvaća teme iz linearne algebre (Algebra matrica; Determinante; Sustavi linearnih jednadžbi; Vektorski prostori; Linearni operatori; Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora), a gradivo Matematike 2 teme iz matematičke analize (Skupovi; Funkcije; Nizovi; Redovi; Neprekidne funkcije; Diferencijalni račun; Integralni račun). Za kolegije Matematika 1 i Matematika 2 se pored standardne matematičke literature preporučuju i knjige [3] i [6], u kojima se naglasak stavlja na povezivanje matematičkih tema i geoloških primjena.

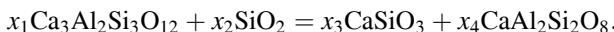
Navedimo jedan primjer iz kolegija Matematika 1 kojim se ilustrira potreba za rješavanjem sustava linearnih jednadžbi u geologiji.

Primjer. Promotrimo sljedeću metamorfnu reakciju:



U ovoj reakciji su grossular i kvarc reaktanti, a volastonit i anortit produkti. Treba odrediti broj formulskih jedinki pojedinog minerala kako bi reakcija bila uravnotežena. Broj formulskih jedinki grossulara $\text{Ca}_3\text{Al}_2\text{Si}_3\text{O}_{12}$ označimo sa x_1 , kvarca SiO_2 sa x_2 ,

volastonita CaSiO_3 sa x_3 , a anortita $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ sa x_4 . Tako dolazimo do jednadžbe



koja nam, nakon usporedbe broja atoma pojedinih kemijskih elemenata s lijeve i desne strane jednadžbe, daje sustav linearnih jednadžbi

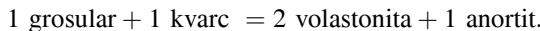
$$3x_1 = x_3 + x_4$$

$$2x_1 = 2x_4$$

$$3x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4$$

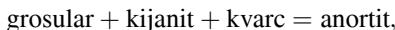
$$12x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 8x_4,$$

čije je rješenje $x_1 = x_2 = x_4 = 1$, $x_3 = 2$. Dakle, reakcija je



Ako iz nekog razloga nismo sigurni je li neki od minerala u reakciji reaktant ili produkt, predznak algebarskog rješenja daje nam odgovor na to pitanje jer su, naravno, brojevi formulskih jedinki uvijek pozitivni.

Za vježbu odredite brojeve formulskih jedinki u reakciji:



ako znate da je kemijska formula za kijanit Al_2SiO_5 .

Sljedeći primjer iz kolegija Matematika 2 ilustrira primjenu nekih elementarnih funkcija u geologiji.

Primjer. U tablici 2 dane su vrijednosti temperature Zemlje na različitim dubinama, izmjerene različitim geofizičkim metodama.

h/km	$T/\text{ }^\circ\text{C}$
0	10
100	1150
400	1500
700	1900
2800	3700
5100	4300
6360	4300

Tablica 2. Podaci o ovisnosti temperature o dubini.

Vidimo da temperatura u unutrašnjosti Zemlje raste s povećanjem dubine i to puno brže prvih 100 km nego nakon 100 km dubine. Prirodno je pitati se koja bi funkcija dobro aproksimirala izmjerene vrijednosti na dubinama većim od 100 km. Jedna takva funkcija je kvadratna funkcija

$$T(h) = -8.255 \cdot 10^{-5}h^2 + 1.05h + 1100.$$

Točniju aproksimaciju, posebno na dubinama između 2000 i 4000 km, daje sljedeći polinom 4. stupnja:

$$T(h) = -1.2 \cdot 10^{-12}h^4 + 2.85 \cdot 10^{-8}h^3 - 0.00031h^2 + 1.64h + 930.$$

No, računanje temperature pomoću ove formule je znatno složenije nego pomoću prethodne. Izbor odgovarajuće formule ovisi o tome je li nam važnija preciznost rezultata ili jednostavnost računanja.

Za vježbu izračunajte aproksimaciju temperature pomoću obje formule na dubinama danim u tablici 2 te usporedite s izmjerenim vrijednostima. Skicirajte grafove dane

kvadratne funkcije i danog polinoma 4. stupnja. Interpretirajte koji dijelovi dobivenih parabola odgovaraju prirodi promatranoj problema (imajte na umu udaljenost središta Zemlje od njene površine).

Više primjera primjene matematičke analize u geologiji može se pronaći u [4].

* * *

Tijekom studija, kroz nekoliko kolegija provlači se pitanje razumijevanja, analize i tumačenja brojčanih podataka što je od nemjerljiva značaja u svim znanstvenim disciplinama. Geolozi istražuju geološke probleme prikupljanjem uzoraka s terena ili opažanjem ciljanih pojava te ih potom analiziraju. Ishod tih analiza su podaci koje potom obrađuju tehnikama kvantitativne geologije ([2]). Ove tehnike se još nazivaju i geostatističke ili geomatematičke (na hrvatskom jeziku više informacija o geomatematički možete pronaći u zanimljivom članku [5]). Temelje se na postavci da se informacija o nekoj većoj pojavi može "izvući" iz opažanja malobrojnih uzoraka prikupljenih iz neusporedivo većeg skupa potencijalnih opažanja te pojave. Drugim riječima, statističkim metodama predviđaju se obilježja veće populacije na temelju malobrojnog skupa prikupljenih uzoraka. Izravna geološka opažanja ograničena su uglavnom na vanjski dio Zemljine kore, a geološki procesi većinom nisu izvedivi u laboratorijima. Stoga su geolozima iznimno bitna ta izravna opažanja, pogotovo ona koja sadrže znatnu količinu nesigurnosti odnosno pogreške, pa bi statistika trebala imati veliku ulogu u njihovim istraživanjima. Geolozi, na temelju opažanja i prikupljenih podataka o prirodnim procesima, postavljaju i testiraju prethodno osmišljene hipoteze o silama koje su (možebitno) djelovale na određenim područjima stvarajući njihove strukture, ali oni isto tako predviđaju i buduće promjene na planetu. Imajući u vidu da je priroda svijeta u suštini varijabilna odnosno promjenjiva, neravnomjerna, nestalna ili nehomogena, jedna od svrha geostatistike je opisati tu varijaciju, tj. raspršenje vrijednosti nekog svojstva. To geolozima omogućuje da predviđaju prostorne odnose (npr. geološke i geokemijske karte) te upravljaju resursima od općeg interesa (npr. kakvoća vode, stanje nutrijenata u poljoprivrednom tlu, naftni/rudni potencijal istraživanog terena, itd.). Budući da je svaka kvantitativna analiza neizostavno povezana s pogreškama, koje su u ovom i ovakvom svijetu neizbjegna pojava, rezultati mjerjenja nemaju nikakvu vrijednost ukoliko nisu prikazani zajedno s nekom procjenom pogreške koja im je svojstvena (intrinzična ili "ugrađena"). U analitici su poznate tri vrste pogrešaka: sustavne, slučajne i grube. Grube je obično lako otkriti jer su obično posljedica kvara instrumenta, onečišćenja kemikalija, nezgode s uzorkom i slično. Slučajne pogreške su posljedica ljudskih faktora (npr. podrhtavanje ruke, nejednako očitavanje skale na instrumentu) i instrumentalnih faktora (npr. fluktuacija protoka električne energije, podrhtavanje zgrade) zbog kojih se rezultati ponovljenih analiza međusobno razlikuju – dakle, one utječu na preciznost odnosno ponovljivost mjernog postupka. Sustavne pogreške su posljedica niza faktora koje je moguće utvrditi i otkloniti, a ukoliko ih se zanemari svi rezultati su pogrešni u istom smjeru, pa su vrijednosti previsoke ili preniske – dakle, one utječu na točnost analitike. U tablici 3 su navedena glavna obilježja slučajnih i sustavnih pogrešaka u analitici.

Slučajne pogreške	Sustavne pogreške
<ul style="list-style-type: none"> • Utječu na preciznost analitike. Izražavaju se pomoću standardne devijacije ili relativne standardne devijacije (koeficijent varijacije). • Ponovljeni rezultati raspršeni su oko svoje aritmetičke sredine. • Procjenjuju se na temelju ponovljenih mjerena. • Mogu se smanjiti kvalitetnom analitikom, ali ne i posve ukloniti. • Izazvane su ljudskim i instrumentalnim faktorima. 	<ul style="list-style-type: none"> • Utječu na točnost analitike. Računaju se apsolutna i relativna greška. • Svi rezultati pogrešni su samo u jednom smjeru, ili su previški ili preniski. • Mogu se otkriti uporabom standardnih metoda i materijala (tzv. CRM, vidite dolje). • Mogu se smanjiti ili ukloniti kvalitetnom analitikom i samostegom. • Izazvane su ljudskim i instrumentalnim faktorima.

Tablica 3. Usporedba karakteristika slučajnih i sustavnih pogrešaka.

U nastavku navodimo primjer iz kolegija Geostatistika s diplomskog studija geologije (4. godina studija).

Primjer. Četiri studenta (A–D) izvode titraciju pri čemu je unaprijed poznato da rezultat treba biti 10.00 mL. U tablici 4 dan je prikaz prisutnosti slučajnih i sustavnih pogrešaka pri izvođenju titracije u laboratoriju (pri čemu \bar{x} označava aritmetičku sredinu, a SD standardnu devijaciju).

studenti	rezultati titracije					tumačenje (\bar{x} ; SD)
A	10.08	10.11	10.09	10.10	10.12	netočno; precizno (10.10; 0.01)
B	9.88	10.14	10.02	9.80	10.21	točno; neprecizno (10.01; 0.17)
C	10.19	9.79	9.69	10.05	9.78	netočno; neprecizno (9.90; 0.21)
D	10.04	9.98	10.02	9.97	10.04	točno; precizno (10.01; 0.03)

Tablica 4. Rezultati četiri titracije (u mL).

Zadatak za vježbu: temeljem analiza obavljenih u nekoliko službeno akreditiranih laboratorija, utvrđeno je da sadržaj potencijalno toksičnog elementa bakra (Cu) u standardnom tlu (eng. certified reference material, CRM) iznosi 42 mg/kg. U pet laboratorija (A–E) na fakultetima i institutima geolozi obave po 6 ponovljenih mjerena. Rezultati mjerena (mg/kg) prikazani su u tablici 5. Odredite točnost i preciznost svakog laboratorija.

A	42.5	41.6	42.1	41.9	41.1	42.2
B	39.8	43.6	42.1	40.1	43.9	41.9
C	43.5	42.8	43.8	43.1	42.7	43.3
D	35.0	43.0	37.1	40.5	36.8	42.2
E	42.2	41.6	42.0	41.8	42.6	39.0

Tablica 5. Rezultati mjerena sadržaja Cu u tlu (u mg/kg).

U studiju mineralogije vrlo je bitno razumijevanje osnova kristalografske projekcije. Velik dio potrebnih znanja i vještina tu su u osnovi matematičke: razumijevanje projekcija sfere na ravninu što uključuje osnove ravninske i sferne trigonometrije, zatim osnove teorije grupe koja je u pozadini klasifikacije kristala temeljem simetrijskih svojstava u kristalne sustave i klase i prostorne grupe te klasične algebre vektora i analitičke geometrije prostora uz korištenje općenitih, a ne samo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (tj. ortonormiranih) baza prostora ([1]).

Kao primjer navodimo sljedeći tip problema iz posljednje navedene tematike, kakav se pojavljuje primjerice u kolegiju Kristalografska baza na diplomskom studiju geologije (4. godina studija).

Primjer. Dana je kristalografska baza $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ (matematički gledano, to jednostavno znači: neka baza uobičajenog trodimenzionalnog prostora; s kristalografske strane to znači da je ona odabrana tako da bude prikladna za opis promatrane strukture kristala i da njeni vektori razapinju tzv. jediničnu čeliju). Uobičajeno je kristalografsku bazu zadati preko tzv. parametara jedinične čelije, tj. duljina vektora baze i kutova među njima. U našem primjeru neka su ti parametri $a = 1.30 \text{ \AA}$,⁴ $b = 2.12 \text{ \AA}$ i $c = 2.45 \text{ \AA}$,⁵ $\alpha = \hat{x}(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$, $\beta = \hat{x}(\vec{a}, \vec{c}) = 87^\circ 12'$ i $\gamma = \hat{x}(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.⁶

Recimo da je difrakcijskim eksperimentom utvrđeno da se u nekom kristalu na pozicijama u jediničnoj čeliji $(0, 0, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)$ i $\left(0, \frac{1}{4}, x\right)$ nalaze atomi koji čine molekulu te da je prvi kemijskim vezama spojen s druga dva, koja su istovrsna. Koliki je x i koji je kut među kemijskim vezama u molekuli?

Obzirom na to da su druga dva atoma istovrsna, kemijske bi veze trebale biti jednakog dužine, dakle x treba odabratiti tako da su vektori $\vec{v} = \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right]$ i $\vec{w} = \left[0, \frac{1}{4}, x\right]$ iste duljine. Iz definicije skalarnog produkta vektora slijedi da se duljina vektora v može dobiti kao

$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Iz koordinata zaključujemo da je $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ i $\vec{w} = \frac{1}{4}\vec{b} + x\vec{c}$. Stoga je

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{3}ac \cos \beta = 1.74026\dots \text{ \AA}^2,$$

odnosno (uvažavajući pravila o značajnim znamenkama) duljina kemijske veze između prvog i drugog atoma je $v = 1.32 \text{ \AA}$. Toliko mora iznositi i duljina druge veze, tj. $w = \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}$. Računamo:

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = \frac{1}{16}b^2 + x^2c^2 + \frac{1}{2}bc \cos \alpha = \frac{1}{16}b^2 + x^2c^2,$$

iz čega izjednačavanjem sa $\vec{v} \cdot \vec{v}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu za x :

$$\frac{1}{16}b^2 + x^2c^2 = 1.74026\dots \text{ \AA}^2.$$

Jedinična čelija se sastoji od točaka prostora čije su sve tri koordinate obzirom na kristalografsku bazu između 0 i 1 te nakon uvrštanja b i c u posljednju jednadžbu

⁴ Matematičarima je možda neuobičajeno imati nulu na kraju decimalnog zapisa, no ovakva je notacija opravdana u prirodnim znanostima jer označava da su do uključivo te pozicije znamenke pouzdane, a nije moguće mjeranjem utvrditi koje su daljnje znamenke stvarnog iznosa.

⁵ Oznaka \AA predstavlja u kristalografskoj često korištenu jedinicu duljine angstrom, iznosa 10^{-10} m .

⁶ Kristalne strukture za koje je $\alpha = \gamma = 90^\circ$ i $\beta \neq 90^\circ$ spadaju u tzv. monoklinski sustav.

biramo ono od dva rješenja x koje je između 0 i 1, dakle (opet uvažavajući pravila o značajnim znamenkama) $x = 0.449$.

Da bismo dobili kut kemijskih veza, sjetimo se da iz definicije skalarnog produkta slijedi da za kut φ između dva vektora \vec{v} i \vec{w} vrijedi

$$\cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{vw}.$$

U našem je zadatku $v = w$ pa nazivnik gore možemo zamijeniti već izračunatim iznosom v^2 . Stoga još treba izračunati $\vec{v} \cdot \vec{w}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{b} + x\vec{c} \right) = \frac{1}{12}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{x}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{8}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{x}{2}\vec{c} \cdot \vec{c}.$$

Kako je \vec{b} okomit na \vec{a} i \vec{c} , od prethodnog izraza preostaje

$$\frac{x}{3}ac \cos \beta + \frac{x}{2}c^2 = 1.36967 \dots \text{ Å}^2,$$

pa je

$$\cos \varphi = \frac{1.36967 \dots}{1.74026 \dots} = 0.787050 \dots,$$

dakle je kut među vezama u molekuli koja je kristalizirala $\varphi = 38^\circ 5'$.

Studenti se nakon završenog studija geologije obično zaposle u vodećim geološkim institucijama kao što su INA industrija nafte d.d. i Hrvatski geološki institut, a mogućnosti zaposlenja nude i brojne građevinske tvrtke te srodnji laboratorijski koji su povezani s ispitivanjem mineralnih sirovina i njihovom uporabom u industriji i građevinarstvu. Osim toga, briga o zaštiti okoliša sve je prisutnija i nužnija u našem zakonodavstvu, tako da je moguće zaposliti se u rastućem broju konzultantskih tvrtki koje se bave izradom studija o utjecaju na okoliš, kao i u nekim ministarstvima, agencijama i udružinama koje se bave praćenjem stanja okoliša. Ponekad se pojavi mogućnost zaposlenja u muzejima, gradskim uredima za prostorno planiranje te raznim institutima koji su usmjereni na proučavanje morskog okoliša.

Geologija ima mnogo zajedničkih interesa s biologijom, geografijom, kemijom, fizikom, ali i matematikom. Stoga je dobar izbor studija za učenike koji pokazuju zanimanje za ove znanosti, posebno ako su osim kabinetском skloni i terenskom radu.

Literatura

- [1] F. M. BRÜCKLER, *Kristalografska skripta* (skripta za matematički dio kolegija), <http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/kristalografska-skripta.pdf>
- [2] J. C. DAVIS, *Statistics and data analysis in geology*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [3] J. FERGUSON, *Introduction to Linear Algebra in Geology*, Chapman & Hall, London, 1994.
- [4] D. ILIŠEVIĆ, D. KRIVO, *Funkcije u nastavi matematike – motivacijski primjeri iz geologije*, Poučak **50** (2012), 40–49.
- [5] M. LAPAINE, T. MALVIĆ, *Geomatematika – matematika ili geoznanost?*, Vijesti Hrvatskoga geološkog društva **37** (2010), 32–42.
- [6] D. WALTHAM, *Mathematics: A Simple Tool for Geologists*, Blackwell, Oxford, 2000.