

Rješenje nagradnog natječaja br. 209

Odredi $x^2 + y^2 + z^2$ ako su x , y i z pozitivni cijeli brojevi takvi da je

$$7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8 \quad (1)$$

$$16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3. \quad (2)$$

Prvo rješenje. Iz $16 \cdot (1) - 7 \cdot (2)$ imamo $y^2 + z^2 = 149$, a iz $7 \cdot (1) - 3 \cdot (2)$ dobivamo $x^2 + z^2 = 65$. Mogućnosti su $(y, z) \in \{(10, 7), (7, 10)\}$ i $(x, z) \in \{(1, 8), (8, 1), (7, 4), (4, 7)\}$. Odavde dobivamo $z = 7$, $x = 4$ i $y = 10$. Kako ove vrijednosti zadovoljavaju dane jednadžbe slijedi $x^2 + y^2 + z^2 = 165$.

Drugo rješenje. Promatramo sistem jednadžbi

$$7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8$$

$$16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = S$$

kao sistem linearnih jednadžbi po x^2 , y^2 , z^2 . Rješavanjem dobivamo $x^2 = S - 149$, $y^2 = S - 65$, $z^2 = 214 - S$. Kako su x^2 , y^2 , z^2 pozitivni brojevi imamo $149 < S < 214$. Kako $S - 65$ mora biti potpun kvadrat dobivamo $S \in \{165, 186, 209\}$. Za ove vrijednosti je $214 - S \in \{49, 28, 5\}$. Ovdje je samo 49 potpun kvadrat i $S = 214 - 49 = 165$. Nadalje je $165 - 149$ također potpun kvadrat, odakle slijedi da je traženi zbroj jednak 165.

Knjigom Darko Žubrinić, *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 2012. nagrađeni su ovi rješavatelji:

1. *Dario Domnjanić* (3), XV. gimnazija, Zagreb;
2. *Sara Džebo* (3), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH;
3. *Petar Orlić* (3), XV. gimnazija, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 2/258

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Sara Džebo* (3), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH, 3441–3446, 3448–3454; *Petar Orlić* (3), XV. gimnazija, Zagreb, 3441–3446, 3448–3453; *Zlatko Petolas* (2), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3441–3454.

b) Iz fizike: *Ivan Brnelić* (8), OŠ Ivana Goran Kovačića, Delnice, 385; *Corina Jakovac* (8), OŠ Ivana Goran Kovačića, Delnice, 383; *Ante Šego* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 382, 384.

Nagradni natječaj br. 211

Dokaži nejednakost

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c).$$