Zanimljive rekurzije

Dragana Jankov Maširević[1], *Jelena Jankov*[2]

Riječ dvije o rekurzijama

Rekurzija je metoda definiranja funkcije na način da se najprije definira nekoliko jednostavnih, osnovnih slučajeva, koje zatim koristimo za definiranje složenijih. Preciznije, rekurzije, odnosno rekurzivne relacije su formule kod kojih se n-ti član nekog niza a_n može izraziti pomoću nekoliko prethodnih članova a_k, $k < n$.

Rekurzije susrećemo svakodnevno, kako u matematici, tako i u programiranju. Naime, čak i u skupu prirodnih brojeva, koji dobro poznajemo, možemo uočiti rekurziju: prvi član je 1, a svaki sljedeći dobijemo tako da prethodni uvećamo za 1. Jednostavan primjer rekurzije je i niz 1, 2, 4, 8, 16,... Uočimo da je prvi član niza $a_1 = 1$, te da svaki sljedeći možemo dobiti tako da prethodni pomnožimo s dva, tj. $a_{n+1} = 2a_n$, za sve $n \geqslant 1$. U sljedećem će poglavlju biti opisana jedna od najpoznatijih rekurzija, tj. Fibonaccijev niz, koji možemo zapisati na sličan način. Zatim ćemo navesti i opisati problem hanojskih tornjeva, Catalanove brojeve, te nekoliko zanimljivih rekurzija vezanih uz njih, kao i Collatzovu pretpostavku koja u sebi krije jednu interesantnu rekurziju.

Fibonaccijevi brojevi

Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci, postavio je 1202. godine problem zečeva. Pretpostavka problema je da na početku mjeseca imamo jedan novorođeni par zečeva (zeca i zečicu), da su zečevi dovoljno stari za oplodnju nakon jednog mjeseca, da dobivaju par mladih zečeva svaki sljedeći mjesec, te da oni ne ugibaju. Zanimalo ga je koliko će biti zečeva nakon n mjeseci. Pokušajmo ovo izračunati *na prste* za nekoliko prvih prirodnih brojeva.

Ako smo na početku mjeseca imali jedan par zečeva, nakon jednog mjeseca i dalje ćemo imati samo taj par, budući da zečevi tek tada postaju zreli za oplodnju. Nakon dva mjeseca imat ćemo početni par zečeva i njihove potomke, zeca i zečicu. Nakon tri mjeseca imamo tri para zečeva – početni par i dva para njihovih potomaka... Kada bi ovakvim postupkom htjeli izračunati broj zečeva nakon većeg broja mjeseci, računanje bi moglo trajati satima. Problem se može znatno olakšati korištenjem rekurzije.

Označimo s F_n broj parova zečeva nakon n mjeseci. Prema prethodno izračunatom, $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$. Kako bi dobili F_n, trebamo zbrojiti sve parove koji su živjeli prethodni mjesec i potomke parova starih barem dva mjeseca. Slijedi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$,

[1] Docent na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku, e-pošta: djankov@mathos.hr

[2] Student na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku, e-pošta: jjankov@mathos.hr

za sve $n \geqslant 2$. Ponekad se u literaturi, zbog jednostavnosti računa, uzima $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Broj zečeva nakon n mjeseci naziva se još i n-ti Fibonaccijev broj. Sljedeći teorem govori o tome kako se još može izračunati n-ti Fibonaccijev broj.

Teorem 1. *Dana je rekurzija* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. *Tada je* n*-ti Fibonaccijev broj* F_n *jednak:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dokaz. (Vidi [7, str. 178, teorem 2].) Ideja dokaza je da se rješenje rekurzivne jednadžbe $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geqslant 2$, traži uz pomoć supstitucije $F_n = q^n$, $q \neq 0$. Uvrštavanjem dobivamo

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}, \quad \text{odnosno} \quad q^{n-2}(q^2 - q - 1) = 0, \quad n \geqslant 2.$$

Dakle, $F_n = q^n$ je rješenje Fibonaccijeve rekurzivne jednadzbe ako i samo ako je $q^2 - q - 1 = 0$, iz čega dobivamo

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Nadalje, možemo zaključiti da su $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ i $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ rješenja Fibonaccijeve rekurzivne jednadžbe. No, općenito, ako su F i G rješenja takve linearne (nema potencija od F različitih od prve) i homogene (nema konstantnih članova) rekurzivne jednadžbe, onda je i njihova linearna kombinacija

$$H = \lambda F + \mu G, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

također rješenje. Zaista, budući da je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, tada množenjem prve relacije s λ, a druge s μ zbrajanjem dobivamo navedenu tvrdnju. Dakle i

$$F_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

je rješenje. Početne vrijednosti za Fibonaccijeve brojeve su $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ pa vrijedi $\lambda + \mu = 0$ (za $n = 0$) i $\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ (za $n = 1$), iz čega dobivamo $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Fibonaccijevi brojevi mogu se povezati s mnogim drugim pojmovima u matematici.

Pokazano je da vrijedi sljedeća jednakost:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}},$$

Ovakvi se razlomci nazivaju neprekidni ili verižni razlomci. Na primjer, vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\frac{F_2}{F_1} &= 2 = 1 + \frac{1}{1} \\
\frac{F_3}{F_2} &= \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1+1} \\
\frac{F_4}{F_3} &= \frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Fibonaccijevi brojevi mogu se dobiti i iz Pascalovog trokuta za binomne koeficijente, koji se često zapisuje u sljedećem obliku:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 & & & \ldots
\end{array}
$$

Ako ga napišemo tako da svi elementi budu poravnati s desne strane, zbrajanjem elemenata na njegovim dijagonalama (gore-lijevo – dolje-desno) dobivamo Fibonaccijeve brojeve:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\
 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 5 \\
 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 8 \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 13 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 21 \\
 & & & & \ldots
\end{array}
$$

Fibonaccijevi brojevi pojavljuju se i u brojnim problemima. Pogledajmo neke od njih.

Primjer 1. Zanima nas na koliko se načina možemo popeti uz n stepenica tako da prekoračujemo po jednu ili dvije stepenice. Označimo s S_n broj načina na koji se možemo popeti uz n stepenica. Stavimo $S_0 = 0$. Nadalje, očito je $S_1 = 1$.

Načini se mogu podijeliti u dvije skupine: na one koji počinju prekoračenjem jedne stepenice i one koji počinju prekoračenjem dvije stepenice. Prvih načina je S_{n-1}, a drugih S_{n-2}, te je $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, za sve $n \geqslant 2$. Vidimo da je ovaj niz jednak Fibonaccijevom nizu.

Primjer 2. Organiziramo zabavu na koju dolaze odrasli i djeca, te ih želimo rasporediti u red tako da dva djeteta ne sjede jedno pored drugog. Zanima nas na koliko načina to možemo napraviti. Ukoliko imamo jednu stolicu, na nju može sjesti ili dijete ili odrasla osoba, dakle postoje dva načina. Označimo bijelim kvadratićem stolicu na kojoj će sjediti dijete, a crnim onu na kojoj će sjediti odrasla osoba. Ako imamo dvije stolice, mogući su sljedeći rasporedi stolica u redu: □ ■, ■ □ ili ■ ■, dok za tri stolice imamo □ ■ □, □ ■ ■, ■ □ ■, ■ ■ □ ili ■ ■ ■. Primijetimo da ukoliko poslažemo $4, 5, 6, \ldots$ stolica u red, mogući broj načina na koji uz zadane pretpostavke na njih mogu sjesti djeca i odrasli je $8, 13, 21, \ldots$. Dakle, rješenja su redom Fibonaccijevi brojevi.

Hanojski tornjevi

Ovu je zanimljivu rekurziju prvi zapisao francuski matematičar Francois Edouard Anatole Lucas 1883. godine. Ona potječe od legende koja kaže da je indijski bog Brahma prilikom stvaranja svijeta u svoj hram postavio tri dijamantna štapa, te je na prvi stavio 64 zlatna koluta različitih promjera, tako da ih je poslagao od najvećeg prema najmanjem, a zatim je od svećenika svog hrama zahtijevao da bez prestanka prebacuje kolutove s prvog štapa na treći, upotrebljavajući srednji štap kao pomoćni. Svećenici su prilikom prebacivanja trebali poštivati određeno pravilo koje se sastojalo u tome da se odjednom može premjestiti samo jedan kolut, te da se ne smije stavljati veći kolut na manji. Legenda također kaže da će, kada budu prebačeni svi kolutovi na treći štap, nastupiti smak svijeta. Pitanje je koliki je minimalni broj premještanja kolutova s prvog štapa na treći. To se može lako pokazati metodom matematičke indukcije. Najprije, označimo s N_n broj premještanja, ukoliko je dano n kolutova. Ako imamo samo jedan kolut, jasno je da imamo samo jedno premještanje, tj. $N_1 = 1$. Pretpostavimo da je za premještanje $n-1$ kolutova potrebno N_{n-1} prijenosa. Ukoliko na prvom štapu ima n kolutova, s N_{n-1} prebacivanja stavimo $n-1$ kolutova na drugi štap, najveći kolut premjestimo na treći štap, što je jedno premještanje, i zatim treba još N_{n-1} premještanja da se $n-1$ manjih kolutova prebaci s drugog na treći štap. Dakle imamo,

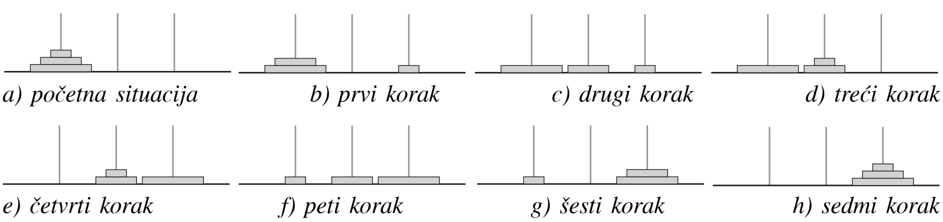
$$N_n = (N_{n-1} + 1) + N_{n-1} = 2N_{n-1} + 1.$$

Sada je

$$\begin{aligned} N_n &= 2N_{n-1} + 1 = 2(2N_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 N_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2N_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 N_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = \cdots \\ &= 2^{n-1} N_1 + \cdots + 2 + 1 = 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1, \end{aligned}$$

što se može lako pokazati metodom matematičke indukcije po $n \in \mathbf{N}$.

Dakle, vidimo da je za prebacivanje 64 koluta potrebno $2^{64} - 1$ tj. 18 446 744 073 709 551 615 prijenosa. Na slici 1 prikazano je rješenje problema u slučaju kada su dana tri koluta, a koje se sastoji od $2^3 - 1 = 7$ koraka.



Slika 1. Rješenje problema hanojskih tornjeva s tri koluta.

Catalanovi brojevi

Catalanovi se brojevi prvi put spominju 1751. godine u pismu Leonarda Eulera matematičaru Christianu Goldbachu, u kojem je Euler predložio način na koji se lako može odrediti broj triangulacija konveksnog n-terokuta, odnosno n-terokuta kojemu je svaki od kutova manji od 180°, ali nije uspio dokazati da je njegova metoda točna. Nešto kasnije, o istom je problemu Euler pisao Johannu Andreasu von Segneru, koji je također riješio problem triangulacije konveksnog n-terokuta, ali na nešto drugačiji način. Kasnih 30-ih godina devetnaestog stoljeća, Joseph Liouville je objavio Eulerovu metodu za koju je tražio dokaz. Javljali su mu se matematičari diljem svijeta, no belgijski je matematičar Eugen Charles Catalan prvi dao točno rješenje problema, te po njemu ovi brojevi danas i nose njegovo ime. Catalanovi se brojevi mogu izračunati pomoću formule

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}, \quad n \geqslant 0,$$

a također su zadani rekurzivnom relacijom

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \quad n \geqslant 1.$$

U tablici 1 navedeno je prvih jedanaest Catalanovih brojeva.

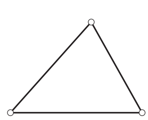
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1 430	4 862	16 796

Tablica 1. Prvih jedanaest Catalanovih brojeva.

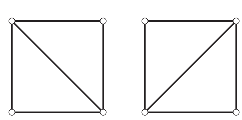
U nastavku ćemo, pored problema triangulacije konveksnog n-terokuta, opisati još nekoliko zanimljivih problema koji kao rješenje imaju Catalanove brojeve, dok ih se u knjizi [2] može pronaći njih 95.

Problem triangulacije konveksnog n-terokuta

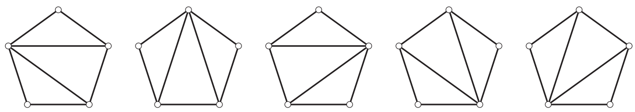
Ovaj se problem sastoji u određivanju broja T_n svih mogućih načina na koje se konveksni n-terokut može podijeliti na $n-2$ trokuta. Pri tome zahtijevamo da dva trokuta iz te triangulacije ili uopće nemaju zajedničkih točaka ili imaju samo jedan (zajednički) vrh ili se sijeku duž (zajedničkog) brida. Takve triangulacije nazivaju se dijagonalnim, jer se koriste samo unutarnje dijagonale n-terokuta koje se ne sijeku u njegovoj unutrašnjosti. Općenito se uzima $T_2 = 1$. Za $n = 3$ imamo trokut koji je već trianguliran, pa je jasno $T_3 = 1$ (vidi sliku 2a)). Na slici 2b) vidimo da je konveksni četverokut moguće triangulirati na dva načina, jer je za triangulaciju potrebno povući samo jednu dijagonalu, a iz b) je $T_4 = 2$, dok je konveksni peterokut moguće triangulirati na $T_5 = 5$ različitih načina (kao na slici 2c)). Nastavimo li dalje s promatranjem konveksnih n-terokuta za $n = 6, 7, 8\ldots$ možemo uočiti da je $T_n = C_{n-2}$ za sve $n \geqslant 2$, što se također može i dokazati metodom matematičke indukcije.



a) triangulacija trokuta



b) triangulacija četverokuta



c) triangulacija peterokuta

Slika 2. Rješenje problema triangulacije nekih konveksnih n-terokuta.

Problem zagrada

Pretpostavimo da imamo n parova zagrada $()$. Problem zagrada sastoji se u određivanju broja načina na koji možemo na *ispravan način* poredati n zadanih parova zagrada, što znači da svakoj prethodno otvorenoj pridružimo odgovarajuću zatvorenu zagradu. Intuitivno možemo pretpostaviti da u slučaju $n = 0$ imamo samo jednu mogućnost. U tablici 2 prikazani su svi mogući načini na koje možemo ispravno poredati zadane parove zagrada u slučaju kada je $n = 1, 2, 3$, te možemo uočiti da su oni jednaki odgovarajućim Catalanovim brojevima C_1, C_2, C_3.

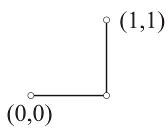
$n = 1$	$()$	jedan način
$n = 2$	$()()$, $(())$	dva načina
$n = 3$	$()()()$, $()(())$, $(())()$, $(()())$, $((()))$	pet načina

Tablica 2. Rješenje problema zagrada za $n = 1, 2, 3$.

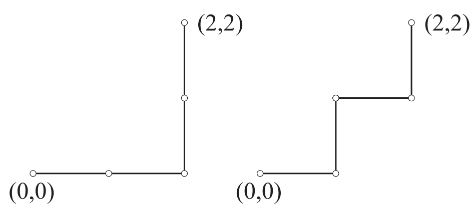
Ukoliko pokušamo riješiti problem za $n = 4, 5, \ldots$ dobit ćemo redom odgovarajuće Catalanove brojeve $C_4, C_5, \ldots$. Dokaz da je rješenje problema zagrada upravo odgovarajući Catalanov broj može se naći u [6].

Putovi u cjelobrojnoj mreži

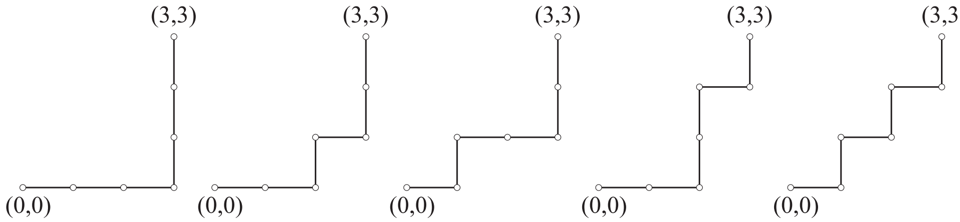
Problem putova u cjelobrojnoj mreži, za zadani prirodni broj n, sastoji se od određivanja svih mogućih najkraćih putova u Kartezijevom koordinatnom sustavu koji polaze od ishodišta $(0, 0)$, a završavaju u točki (n, n). Uvjet pri odabiru putova je da oni prolaze samo kroz cjelobrojne točke, nikada ne prijeđu iznad pravca $y = x$, odnosno ne prelaze dijagonalu zadane mreže i da smo u svakom sljedećem koraku bliži krajnjoj točki, pa su stoga dozvoljeni samo pomaci gore ili desno po zadanoj mreži. Ako je $n = 0$, stavimo da imamo samo jedan mogući put. Na slici 3 prikazani su svi mogući putovi u slučaju kada je $n = 1, 2, 3$, te možemo uočiti da je broj putova u svakom pojedinom slučaju jednak odgovarajućem Catalanovom broju. Ovaj se problem može lako povezati s problemom zagrada i to tako da svaku otvorenu zagradu zamijenimo s odmakom od dijagonale, u desno, a svaku zatvorenu zagradu, pomakom gore, prema dijagonali.



a) $n = 1$



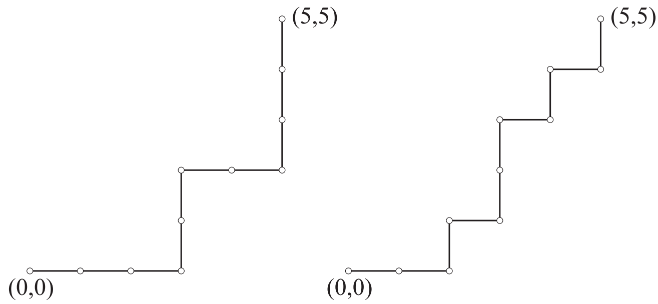
b) $n = 2$



c) $n = 3$

Slika 3. Rješenje problema putova za dani n.

Primjer 3. Za zadane probleme putova u cjelobrojnoj mreži, na slici 4 a) i b) napravite odgovarajući problem zagrada.



a) *b)*

Slika 4. Primjeri putova za $n = 5$.

Rješenje. Pomoću problema zagrada zadani se problem može zapisati na sljedeći način:

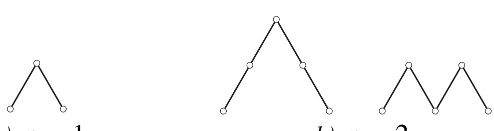
a) $((())(()))$

b) $(()())()()$.

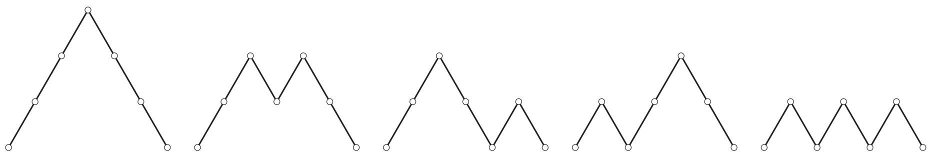
Isto tako, problem zagrada lako možemo prevesti na problem putova u cjelobrojnoj mreži.

Dyckovi planinski putovi

Problem Dyckovih planinskih putova sastoji se u pronalaženju svih mogućih konfiguracija planinskih lanaca koji imaju točno n uspona i n silazaka, uz pretpostavku da se oni uvijek nalaze iznad početne razine lanca. Ako je $n = 0$, moguća je samo jedna konfiguracija. Na slici 5 možemo vidjeti da u slučaju $n = 1$ također postoji samo jedna konfiguracija, dok je za $n = 2$ moguće napraviti dvije, odnosno za $n = 3$ pet različitih planinskih konfiguracija.



a) $n = 1$ *b)* $n = 2$

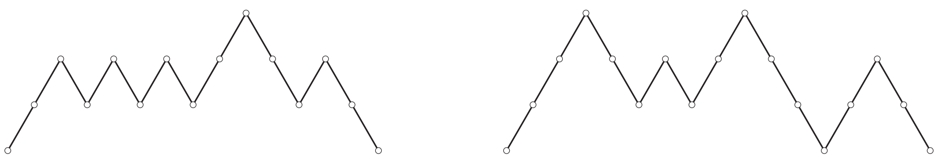


c) $n = 3$

Slika 5. Rješenje Dyckovih planinskih putova za $n = 1, 2, 3$.

Problem Dyckovih planinskih putova možemo povezati s već opisanim problemom zagrada i to tako da svaku otvorenu zagradu zamijenimo usponom, a zatvorenu spuštanjem.

Primjer 4. Za zadane probleme Dyckovih planinskih putova, na slici 6a) i b) napravite odgovarajući problem zagrada.



a) *b)*

Slika 6. Primjeri Dyckovih planinskih putova.

Rješenje. Zadani problem možemo zapisati pomoću problema zagrada na sljedeći način:

a) $(()()()(())())$

b) $((())()(()))(())$.

Također, problem zagrada na isti način možemo zapisati u obliku odgovarajućeg problema Dyckovih planinskih putova.

Collatzova pretpostavka

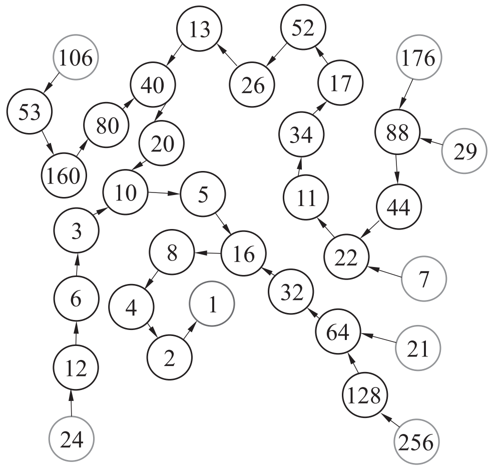
Collatzova pretpostavka, koja se još naziva i Collatzova slutnja, $3n + 1$ problem, Ulamova pretpostavka ili Kakutanijev problem, dobro je poznat otvoren problem, koji je 1937. godine postavio njemački matematičar Lothar Collatz.

Ova pretpostavka glasi: *Odaberimo proizvoljan prirodan broj, te ako je on paran, podijelimo ga s* 2*, a ako je neparan, pomnožimo ga s* 3 *i zatim uvećamo za 1. Koristeći ovaj postupak, rekurzivno, nakon konačno mnogo koraka dobit ćemo broj 1.*

Matematički ovo možemo zapisati na sljedeći način: za zadani prirodni broj a_n, naredni se izračunava na sljedeći način:

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & \text{ako je } a_n \text{ neparan} \\ \dfrac{a_n}{2}, & \text{ako je } a_n \text{ paran.} \end{cases}$$

Mnogi su matematičari pokušavali dokazati da je ova pretpostavka točna ili naći kontraprimjer kada ona ne vrijedi, dok je poznati mađarski matematičar Paul Erdős rekao da *Matematika još nije spremna za ovakve probleme*.



Slika 7. Primjeri rješavanja Collatzove pretpostavke.

Na slici 7 možemo vidjeti rješenje Collaztove pretpostavke u slučaju da je zadan polazni broj 7, 21, 24, 29, 106, 176 ili 256.

Literatura

[1] J. Fürlinger, J. Hofbauer, *q-Catalan Numbers*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 40, 248–264, 1985.

[2] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] E. Lehtonen, *Two undecidable variants of Collatz's problems*, Theoretical Computer Science 407, 596–600, 2008.

[4] J. Lodder, *Gabriel Lamé's Counting of Triangulations*, Loci, 2013., DOI:10.4169/ loci003996.

[5] A. A. K. Majumdar, *Generalized multi-peg Tower of Hanoi problem*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 38, 201–208, 1996.

[6] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[7] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[8] Hrvoje Čavrak, *Catalanovi brojevi*, Hrvatski matematički elektronski časopis, no. 7, veljača 2006. `http://e.math.hr/old/catalan/index.html`

[9] T. Davis, *Catalan Numbers*, 2006. `http://www.geometer.org/mathcircles`

[10] Zvonimir Šikić, *Fibonaccijev niz*, 2004. `http://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/ZS_fibonaccijev_niz.pdf`